SDG
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
SS 2017

Übungszettel II, Mai 2018

Erinnerung:

a) $g \in \Sigma([0,T])$, falls $g(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k \mathbf{1}_{A_k}(s)$, $A_k \in \mathcal{B}([0,T])$

b) $g \in \Sigma_\infty([0,T])$, falls $g(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k \mathbf{1}_{A_k}(s)$, $A_k \in \mathcal{B}([0,T])$

c) $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ für f reellwertige messbare Funktion.

Übung 0: (Erinnerung aus Masstheorie)

a) Beweisen Sie, dass für jede $\mathcal{B}([0,T])/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion g eine Folge von Funktionen $g_n \in \Sigma_\infty([0,T])$ existiert, so dass $lim_{n\to\infty}\|g - g_n\|_\infty = 0$

b) Beweisen Sie, dass $\Sigma([0,T])$ dicht in $\Sigma_\infty([0,T]) \cap \mathcal{L}^2([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda)$ in der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ ist.

Übung I:

a) Seien X und Y reellwertige Zufallsvariabeln auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   i) X und Y sind stochastisch unabhängig.

   ii) für jedes $A \in \sigma(X)$ ist $\mathbf{1}_A$ stochastisch unabhängig von Y.

   iii) für jedes $A \in \sigma(X)$ und $B \in \sigma(Y)$ sind $\mathbf{1}_A$ und $\mathbf{1}_B$ stochastisch unabhängig.

b) Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ σ -Algebren auf Ω. Beweisen Sie, dass $\sigma(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{A})$, mit $\mathcal{A} := \{C \cap D : C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$.

Übung II:
Gegeben eine Folge von stochastisch unabängigen reellwertigen Zufallsvariabeln $\{X_n\}_{n\in N}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, für die gilt

i) $X_0 = 0$ P -f.s.,

ii) $X_k \sim X$ mit $k > 0$ und X binomial verteilt mit Werten $0, 1$ und Parameter $p \in (0, 1)$ fixiert.

Beweisen Sie, dass $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mit $S_n := \sum_0^n X_k$ keine Martingale bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, mit $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, ...X_n)$, ist.

Übung III:

a) Beweisen Sie, dass in Übung II $\sigma(X_0, ...X_n) = \sigma(S_0, ...S_n)$.

b) Finden Sie ein Beispiel einer nicht konstanten Martingale auf $(\Omega, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \mathcal{F}, P)$, mit $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ definiert wie in Übung II.

Übung IV

Sei jetzt in Übung II $X_k \sim X$ mit X binomial verteilt mit Werten $-1, 1$ anstatt $0, 1$. Finden Sie eine Filtration $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bzgl. der $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ keine Martingale ist. Beweisen Sie Ihre Aussage.

Übung V

i) Beweisen Sie, dass falls X und Y zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariabeln auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sind, dann X und Y unkorreliert sind.

ii) Beweisen Sie an Hand eines Gegenbeispieles, dass die umgekehrte Aussage von i) nicht gilt.

Übung VI:

a) Beweisen Sie, dass für eine Zufallsvariabel mit Werteraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}})$ gilt, dass $\sigma(X) = \{A : A = X^{-1}(B) B \in \hat{\mathcal{F}}\}$

b) Finden Sie einen Bsp von zwei Zufallsvariabeln X, Y mit Werteraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}})$ für die gilt, dass $\sigma(X, Y) \neq \{A : A = X^{-1}(B)$ oder $A = Y^{-1}(B), B \in \hat{\mathcal{F}}\}$

Übung VII:

Gegeben der W -Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine σ -Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

a) Beweisen Sie, dass jede Zufallsvariabel X die $\mathcal{G}$ -messbar ist auch $\mathcal{F}$ -messbar ist.

b) Bringen Sie einen konkreten Bsp einer Zufallsvariabel X, die $\mathcal{F}$ -messbar, jedoch nicht $\mathcal{G}$ -messbar ist .