Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal, Abgabe 20.07.2016

Übungszettel VI Risikotheorie

Übung I:

a) Sei (X_1, X_2) eine bivariate Normalverteilung mit marginale Gauss -Verteilungen $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_2^2)$, bzw $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ und Kovarianz $\rho\sigma_1\sigma_2$. Sei $Y_1 := \frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}$, $Y_2 := \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}$. Beweisen Sie, dass der Zufallsvektor (Y_1, Y_2) die gleiche Copula besitzt. Geben Sie die Copula und die Verteilungsfunktion von (Y_1, Y_2) an.

b) Geben Sie eine 2-dim Verteilung eines Zufallsvektors (Z_1, Z_2), welcher die gleiche Copula wie (X_1, X_2) hat, aber dessen Randverteilungen "fat tails" haben

Übung II:

a) Finden Sie die Randverteilungen und Copula der bivariaten Verteilung $H_\theta(x, y) = exp\left(-(e^{-\theta x} + e^{-\theta y})^{1/\theta}\right)$, definiert für $x, y \in \mathbb{R}$, und $\theta > 1$ fixiert.

b) Beweisen Sie, dass dessen Copula für $\theta \to \infty$ zur Komonotonie - Copula konvergiert.

c) Erklären Sie für welche Werte von θ dessen Copula mit der Unabhängigkeitscopula übereinstimmt.

d) Bestimmen Sie "untere" und "obere Tailabhigigkeit" der Copula in Abhängigkeit von θ.

Übung III:

Geben Sie die 2-dim Verteilungsfunktion und Randverteilungen eines Zufallsvektor $(X; Y)$, dessen eine Marginale die Randverteilung Pareto $(1, 1)$ hat, und dessen zweite Marginale keine Paretoverteilung hat. Ausserdem soll gelten:

a) dessen Marginale sind stochastisch unabhängig

b) dessen Copula ist die Komotonie - Copula

c) dessen Copula ist die Kontramonotoniecopula

Verteilungsfunktion einer Pareto - Verteilung mit Parameter $x_0, a > 0$ ist $F(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-a}$

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.