Risikotheorie: Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktione gegeben durch

$$H(x,y) = \left(1 + e^{-x} + e^{-y}\right)^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass

(a) X und Y standard, (univariate) logistische Verteilungen sind, d.h.

$$F(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-1} \quad \text{und} \quad G(y) = \left(1 + e^{-y}\right)^{-1}.$$

(b) die Copula von X und Y gegeben ist durch

$$C(u,v) = \frac{uv}{u+v-uv}.$$

Aufgabe 2. Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion gegeben durch

$$H_\theta(x,y) = \exp\left\{-\left(e^{-\theta x} + e^{-\theta y}\right)^{1/\theta}\right\}$$

für alle $x, y \in \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$, wobei $\theta \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass die Copula von X und Y gegeben ist durch

$$C_\theta(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}.$$

Aufgabe 3. Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit Copula C und univariate Verteilungsfunktion F bzw. G. Zeigen Sie, dass

(a) die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen $\max(X,Y)$ und $\min(X,Y)$ gegeben sind durch

$$\mathbb{P}\left(\max(X,Y) \leqslant t\right) = C\left(F(t), G(t)\right)$$

und

$$\mathbb{P}\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) = F(t) + G(t) - C\left(F(t), G(t)\right),$$

so dass, falls $F = G$

$$\mathbb{P}\left(\max(X,Y) \leqslant t\right) = \delta_C(F(t)) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) = 2F(t) - \delta_C(F(t))$$

gilt.

(b) die obigen Verteilungsfunktionen beschränkt sind durch

$$\max\left(F(t) + G(t) - 1, 0\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\max(X,Y) \leqslant t\right) \leqslant \min\left(F(t), G(t)\right)$$

und

$$\max\left(F(t), G(t)\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) \leqslant \min\left(F(t) + G(t), 1\right).$$

Hinweis: Die Aufgaben werden an der Tafel am Mittwoch den 22. Juni gelöst.