Risikotheorie: Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei C eine Copula und $(a,b) \subset I^2 := [0,1] \times [0,1]$. For $(u,v) \in I^2$ definiere

$$K_{a,b}(u,v) = V_C\left([a(1-u), u + a(1-u)] \times [b(1-v), v + b(1-v)]\right).$$

Zeigen Sie, dass $K_{a,b}$ wieder eine Copula ist.[1]

Aufgabe 2. Finden Sie ein Beispiel einer bivariaten Verteilung mit standardnormalen Margins, das jedoch nicht die bivariate Standardnormalverteilung mit Parametern $\mu_X = \mu_Y = 0$ und $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$ sowie Pearsons Produktmoment-Korrelationskoeffizient ρ ist.

Aufgabe 3. Sei $t \in [0,1)$ und $C_t : I^2 \to I$ definiert durch

$$C_t(u,v) = \begin{cases} \max(u+v-1, t), & (u,v) \in [t,1] \times [t,1], \\ \min(u,v), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass C_t eine Copula ist.

Hinweis: Die Aufgaben werden an der Tafel am Mittwoch den 15. Mai gelöst.

[1]Es lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} K_{0,0}(u,v) &= C(u,v), \\ K_{0,1}(u,v) &= u - C(u, 1-v), \\ K_{1,0}(u,v) &= v - C(1-u, v) \text{ und} \\ K_{1,1}(u,v) &= u + v - 1 + C(1-u, 1-v). \end{aligned}$$