Risikotheorie: Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass

(a) $C_1(u,v) = \min(u,v)$,

(b) $C_2(u,v) = \max(u+v-1,0)$, und

(c) $C_3(u,v) = uv$

Copulae sind.

Aufgabe 2. (a) Seien C_1, C_2 zwei Copulae und $\theta \in I := [0,1]$. Zeigen Sie, dass das gewichtete arithmetische Mittel

$$(1-\theta)C_1 + \theta C_2$$

wieder eine Copula ist. Folgern Sie daraus, dass jede konvexe Linearkombination von Copulae eine Copula ist.

(b) Zeigen Sie, dass das geometrische Mittel zweier Copulae im Allgemeinen keine Copulae ist.

(c) Wir betrachten hier noch einmal die in Aufgabe 1 definierten Copulae $C_1(u,v) = \min(u,v)$, $C_2(u,v) = \max(u+v-1,0)$, und $C_3(u,v) = uv$. Seien $\alpha, \beta \in I := [0,1]$ mit $\alpha + \beta \leqslant 1$. Zeigen Sie, dass

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \alpha C_1(u,v) + (1-\alpha-\beta)C_3(u,v) + \beta C_2(u,v)$$

eine Copula ist. (*Eine derart definierte Copula wie $C_{\alpha,\beta}$ hat Fréchet (1958) unter anderem untersucht.*)

Aufgabe 3. Sei $X \sim U([0,1])$. Beweisen Sie, dass

(a) C_1 die Verteilung von X ist.

(b) C_2 die Verteilung von $(X, 1-X)$ ist.

(c) Seien Y und X unabhängig und $X \sim Y$. Zeigen Sie, dass C_3 die Verteilung von (X,Y) ist.

Hinweis: Die Aufgaben werden an der Tafel am Mittwoch den 8. Mai gelöst.