Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Natur Wissenschaft
Angewandte Mathematik-Stochastik
Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea

Prof. Dr. Barbara Rüdiger
M.Sc. Brice Hakwa

Übungen zu Risikotheorie (SS 2014)

Blatt 3 Abgabe bis: 28.05.14 10h15

Aufgabe 1: (4 Pts.)

a) Sei X einer $Exp(1)$ verteilten Zufallsvariablen (D.h. $X \sim Exp(\lambda)$).
Zeigen Sie:

$$Y := \frac{1}{\lambda} \cdot X \sim Exp(\lambda)$$

b) Sei $X \sim \mathscr{N}(0,1)$. Zeigen Sie:

$$Y := \mu + \sigma X \sim \mathscr{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$$

wobei. $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$

Aufgabe 2: (4 Pts.)

Sei X ein gammaverteilte ZV. mit der parameter k und λ (D.h. $X \sim \Gamma(k,\lambda)$). Zeigen Sie:

$$E[X] = \frac{k}{\lambda},$$
$$Var[X] = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Aufgabe 3: (4 Pts.)

Die Dichte einer t-verteilten Zufallsvariablen mit n Freiheitsgraden is

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{1}$$

wobei

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Sei T eine t-verteilte Zufallsvariablen mit n Freiheitsgraden, dann gilt

$$T \stackrel{d}{=} \frac{Y}{\sqrt{\chi_n^2/n}}, \tag{2}$$

wobei Y eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist, und χ_n^2 eine, von Y unabhängige, χ_n^2verteilte Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden.
Diskutieren Sie Anhang der obigen Formel (2) oder der Dichte (1) ob die Normalverteilung oder t-Verteilung geeigneter ist um große Risiken zu beschreiben.

Aufgabe 4: (4 Pts.)
Seie X eine Zufallsvariable, dessen Logarithmus normalverteilt ist (X heisst lognormalverteilt). Berechnen Sie

1. die Dichte f_X von X,
2. den Erwartungswert $E(X)$,
3. und die Varianz $Var(X)$.

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Sei X eine normal verteilte Zufallvariable ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). Bestimmen Sie:

1. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$,
2. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$,
3. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.