Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Natur Wissenschaft
Angewandte Mathematik-Stochastik
Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea

Dr. Peng Jin

Übungen zu: Maß- und Integrationstheorie (SS 2012)

Blatt 3

Definition(liminf und limsup) Es seien $A_1, A_2, \cdots$ Teilmengen von Ω. Dann heißen

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_m$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Limes inferior beziehungsweise *Limes superior* der folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung: Es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \sharp\{n \in \mathbb{N} : \omega \notin A_n\} < \infty\},$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \sharp\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} = \infty\}.$$

Der Limes inferior ist also das Ereignis, dass *schließlich alle* der A_n eintreten, der Limes superior hingegen das Ereignis, das unendlich viele der A_n eintreten.

Aufgabe 1:
Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Setze

$$A_n = (-1/n, 1]$$

wenn n ist ein ungerade Zahl, und

$$A_n = (-1, 1/n]$$

wenn n ist ein gerade Zahl. Finden Sie $\limsup_{n\to\infty} A_n$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 2:
Es seien $A_1, A_2, \cdots$ Teilmengen von Ω. Man beweise oder widerlege: $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$, $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 3:
Es seien $A_1, A_2, \cdots$ Teilmengen von Ω. Die Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ heißt **konvergent**, wenn $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$. In diesem Fall nennt man $\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ **Grenzwert** von $(A_n)_{n\geq 1}$. Man verifiziere:

Ist A_n wachsend [bzw. fallend], so konvergiert (A_n) und es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_n A_n$ [bzw. $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_n A_n$].