Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger **SS 2011**

Übungsklausur Maß- und Integrationstheorie

III. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}, B, (\mathbf{R}), \mu)$ mit $\mu \equiv N(0,1)$ Finden Sie eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ für die gilt:

- $f\mathbf{1}_{[0,1]}$ ist in keinem Punkt stetig.
- $\int f d\mu = 0$
- $\forall M \text{existiert} x \in [0,1]$, sodass $f(x) > M$
  (4 Punkte)

IV. Definieren Sie auf $(\mathbf{R}, B(\mathbf{R}), \mu)$, mit $\mu = \mu_L$, ein Folge von Funktionen $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mit der Eigenschaft $\forall n \in \mathbf{N}\ \mu(\{x \in \mathbf{R} : f_n(x) > n\}) > 0$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\mathbf{1}_\mathbf{R}$ μ- f. s.
(4 Punkte)

b) $f_n \overset{\mu}{\to} 0\mathbf{1}_\mathbf{R}$ (d. h. f_n konvergiert zu $f = 0\mathbf{1}_\mathbf{R}$ nach Maß) und a) gilt aber nicht.
(4 Punkte)

c) Finden Sie in b) eine Teilfolge von $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, für die a) gilt.
(2 Punkte)

V. Sei

$$f(x) \begin{cases} 1 & x \in [0;1] \quad \backslash\mathbf{Q} \\ 0 & x \notin [0;1] \quad \backslash\mathbf{Q} \end{cases}$$

1) Finden Sie die Verteilungsfunktion F_f und die Verteilung μ_f die von f induziert ist, falls f

   a) auf dem W-Raum $([0;1], \mathcal{B}([0;1], \mu_u))$
   b) auf dem W-Raum $([0;1], \mathcal{B}[0;1], \delta_{\frac{1}{2}})$

   definiert ist und zeichnen Sie jeweils F_f.
   (8 Punkte)

2) Berechnen Sie für a) und b) den Erwartungswert von f.
   (2 Punkte)

Maximale Note bei der Punktzahl 35 Punkte, Zeit 90 Minuten