Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger **SS 2011**

Klausur Maß- und Integrationstheorie

I. Sei $(\Omega, \mathcal{I}, P)$ ein W-Raum. Sei $A \in \mathcal{I}$, $P(A) > 0$

a) Beweisen Sie

$$\mathcal{I}_A = \{B = A \cap C : C \in \mathcal{I}\}$$

ist eine σ-Algebra auf A

[3 Punkte]

b) $P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(A, \mathcal{I}_A)$

[3 Punkte]

c) Verknüpfen Sie das Resultat in b) mit Ihren Kenntnissen aus der Einführung in die Stochastik. Wie wird das W-Maß P_A genannt? (1 Punkt)

II. Beweisen Sie:

Sei $\varphi = \{]a; b] : a < b\}$
$\Phi = \{[a, b] : a < b\}$
Beweisen Sie $\sigma(\varphi) = \sigma(\Phi)$

[4 Punkte]

III. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. $f : \Omega \to \mathbf{R}$ $\mathcal{F}/B(\mathbf{R})$-messbar.

Beweisen Sie: Sei $\{x_0\} \in \mathcal{F}$, $x_0 \in \Omega$

$$\int f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

[4 Punkte]

IV. Geben Sie eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, die folgende Eigenschaft hat:

1) f ist in keinem Punkte stetig.
2) Für jedes $M > 0$ existiert $x_M \in \mathbf{R}$ mit $f(x_M) > M$
3) $\int f d\mu_L = 2$ wobei μ_L das Lebesgue-Maß ist.

[4 Punkte]

V. a) Beweisen Sie $\{x_0\} \in B(\mathbf{R})\ \forall x_0 \in \mathbf{R}$ [4 Punkte]

b) Beweisen Sie: Sei μ ein Maß mit Dichte p auf $(\mathbf{R}, B(\mathbf{R}))$, dann gilt $\mu(\{x_0\}) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$

[4 Punkte]

VI. Sei $f = \sum_k k^4 \mathbf{1}_{\{k\}}$.

Finden Sie ein endliches Maß μ auf $(\mathbf{R}, B(\mathbf{R}))$, sodass

$$- \int f d\mu < \infty \ ,$$

und

$-f^2$ ist nicht integrierbar bzgl. μ

[4 Punkte]

Gesamt-Punkte: 30
Maximale Note bei der Punktzahl 27 Punkte, Zeit 90 Minuten