Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal, Fachbereich C, Mathematik\Stochastik

Übung 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine cádlág Funktion, d.h. für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$ und $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) < \infty$. Sei $\Delta f(x_0) := f(x_0) - \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$.
Es ist bekannt: Für alle $M > 0$ gilt $\#\{x_0 \in \mathbb{R} : |f(x_0)| > M\} < \infty$ (Da sonst f explodieren könnte für $x \in \mathbb{R}$).

Beweisen Sie: Die Abbildung $N : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^0$, $A \to N(A)$ mit
$N(A) = \#\{x_0 \in \mathbb{R} : \Delta f(x_0) \in A\}$ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Bemerkung: $\#$ steht für Anzahl.
Hilfestellung: Beweisen Sie N definiert ein Prämaß auf $S = \{]a,b] : a < b\} \cup \varnothing$. Unterscheiden Sie die Fälle $N(\mathbb{R}) = \infty$ und $N(\mathbb{R}) < \infty$.

Übung 2. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ die Menge aller offenen Mengen aus X. Sei $K(x_0, R) := \{x \in X : d(x, x_0) < R\}$ und $\mathbb{K} \subseteq 2^X$ die Menge aller $K(x_0, R)$ für jedes $x_0 \in X$ und $R \in \mathbb{R}_+$

Beweisen Sie: $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathbb{K})$