Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger **SS 2010**

Übungsblatt 2 zur Maß- und Integrationstheorie

1. Beweisen Sie: Seien (Ω, J) und $(\widehat{\Omega}, \widehat{J})$ Messräume. Sei $\widehat{J} = \sigma(S)$ mit $S \leq 2^{\Omega}$. f ist $J/\widehat{J}$ messbar falls und nur falls $f^{-1}(A) \in J \forall A \in S$.

2. Beweisen Sie: Sei (Ω, J, ν) ein Messraum. Seien $f : \Omega \to \mathbf{R}$, $g : \Omega \to \mathbf{R}$ messbar.

   a) Falls $g \geq 0$ $\nu - f.s.$ dann ist f/g messbar.

   b) $\max(f, 0)$ und $\max(f, g)$ sind messbar.

3. Finden Sie drei Beispiele von Messräumen (Ω, J) wo alle Maße μ vollständig sind.

4. Seien $f_n : \Omega \to \mathbf{R}, f : \Omega \to \mathbf{R}$ Funktionen mit $\lim f_n(\omega) = f(\omega)$

   a) Schreiben Sie die Menge $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq y\}$ in Funktion der Mengen $\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) < y + \frac{1}{k}\}, k \in \mathbf{N}$

   b) Beweisen Sie: $f_n J/B(\mathbf{R})$ - meßbar impliziert $f\ J/B(\mathbf{R})$ meßbar.

5. Sei $f : \Omega \to \mathbf{R}$ eine meßbare Funktion auf (Ω, J, μ). Beweisen Sie

$$\int_A f d_\mu = 0 \text{ falls } \mu(A) = 0$$

6. Sei

$$f = \begin{cases} 1 & \times \in \quad \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \times \notin \quad Q \cap [0,1] \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} 1 & \times \in \quad \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \times \notin \quad \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

   Berechnen Sie $\int f d\mu$ und $\int g d\mu$ für den Fall wo

   a) $\mu = \mu_L$

   b) $\mu = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n^2} \delta_{\frac{1}{n}}$

   c) $\mu = \delta_{\sqrt{2}}$

d) $\mu = \exp$ mit $\exp(]-\infty, y]) =$

$$\begin{cases} 1 - e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$