Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger **SS 2010**

Übungsklausur Maß- und Integrationstheorie

I. Beweisen Sie
   Sei $\mathbf{R}$ der Ereignisraum
   Sei $S = \{]a;b] : a < b\}$
   $\zeta = \{[a,b[: a < b\}$
   $\sigma(\phi) = \sigma(\zeta)$

   (4 Punkte)

II. Sei

$$f(x) \begin{cases} 1 & x \in [0;1] \quad \backslash \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin [0;1] \quad \backslash \mathbf{Q} \end{cases}$$

   1) Finden Sie die Verteilungsfunktion F_f und die Verteilung μ_f die von f induziert ist, falls f
      a) auf dem W-Raum $([0;1], \mathcal{B}([0;1], \mu_u))$
      b) auf dem W-Raum $([0;1], \mathcal{B}[0;1], \delta_{\frac{1}{2}})$

      definiert ist und zeichnen Sie jeweils F_f.
      (8 Punkte)

   2) Berechnen Sie für a) und b) den Erwartungswert von f.
      (2 Punkte)

III. Beweisen Sie an Hand des Satzes von Beppo-Levi den Satz von Fatou.

   (4 Punkte)

IV. Beschreiben Sie ein Beispiel einer Folge von meßbaren Funktionen - auf $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu_{\mathcal{L}})$ die μ_L fast sicher - aber nicht in $L'(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu_{\mathcal{L}})$ nach Null konvergiert.

   (4 Punkte)

V. Gegeben das Maß $\mu = \sum\limits_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n^3} \delta_{\sqrt{n}}$ auf $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$.

   Finden Sie eine Funktion f mit $f \in L'(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$ und $f \notin L^2(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$

   (4 Punkte)

VI. Finden Sie eine Verteilungsfunktion F ohne Dichte und begründen Sie ihre Aussage.

Maximale Note bei der Punktzahl 24 Punkte, maximale Punktzahl 28 Punkte.