

C'EST UNE FAÇON DE PARLER (LEIBNIZ)

MICHAEL REEKEN

Ein ungewohnter Blick auf das Mengenuniversum

Dritter Teil

1. SYNTAKTISCHE BETRACHTUNGEN

1.1. **Formalisierung.** Das gehört zu den Themen, die in der üblichen mathematischen Ausbildung ausgespart werden. Ohne die Formalisierung überzubewerten, handelt es sich zweifellos um eine der grundlegenden Erkenntnisse des 20. Jahrhunderts, die ein Verständnis dafür eröffnet, welche Art von Verlässlichkeit mathematische Theorien bieten, aber auch welchen Beschränkungen sie unterliegen.

Das soll hier keine Vorlesung über mathematische Logik oder Philosophie der Mathematik sein, dennoch will ich versuchen im Telegrammstil eine Vorstellung davon bei jenen Hörern zu wecken, die damit nicht in Berührung gekommen sind. Diejenigen, die solche Aufklärung nicht nötig haben, bitte ich um Verständnis und Geduld.

1.1.1. *Hilberts Programm.* Das Programm der Formalisierung geht auf Hilbert zurück, der in den Grundlagendebatten die Gegenposition gegen Brouwer vertrat. Gegen die durchaus bedenkenswerten Argumente, die eine radikale Korrektur forderten an der Art Mathematik zu machen, wie sie gerade auch durch Hilbert betrieben wurde, verfolgte dieser ein Programm, das all diese Bedenken ausräumen sollte. Sein Plan war zu zeigen, daß das Sprechen über aktuell unendliche Mengen vergleichbar ist der Einführung idealer Punkte in der Geometrie. Also um eine Art des Sprechens, die keine wirklichen Objekte beschreibt, sondern nur erlaubt Aussagen prägnant auszudrücken. Der eigentliche Inhalt sollte in den elementaren mathematischen Aussagen liegen. Dazu mußte gezeigt werden, daß alle elementaren mathematischen Aussagen reproduziert werden, selbst wenn die idealen Objekte in die Argumentation einbezogen werden.

Die elementare Zahlentheorie sollte daher als eine unmittelbar einsichtige Mathematik den Maßstab bilden. Da den Argumenten der idealen Mathematik keine unmittelbare Evidenz und daher keine unmittelbare Überzeugungskraft zukam, mußte die Argumentation so weit formalisiert werden, daß der von jedem Sinn befreiten, regelgesteuerten Manipulation von Formeln als einer dem Rechnen mit Zahlen vergleichbaren Tätigkeit eine der elementaren Mathematik vergleichbare Evidenz der Korrektheit erwuchs. Das formalisierte System ist also nichts weiter als eine Art von symbolischer Schatten der normalen mathematischen Argumentation, in dem

jedoch die Argumentation sich von jedem Sinn befreit durch von Regeln bestimmte Manipulation von Formeln darstellt.

Die *Konsistenz* dieses Formalismus, d.h. die Unmöglichkeit in ihm einen Widerspruch herzuleiten, ist die minimale Forderung, die man für die Verwirklichung von Hilberts Programm stellen muß. Eine weitere besteht dann darin nachzuweisen, daß die nicht idealen Aussagen der idealisierten Theorie nur die elementaren mathematischen Aussagen sind, etwas, das in moderner Sprechweise *Konservativität* der idealisierten Theorie über der elementaren heißt. Die Mittel zu diesen Untersuchungen sind in der *Metamathematik* (auch *Beweistheorie*) enthalten und sollten laut Hilbert von *finitärer Natur* sein, was er jedoch nie präzisiert hat. Auch zeigte sich die Trennung zwischen elementarer und idealer Mathematik als problematisch.

Wie kann man aber die mathematische Argumentation in dieser Weise formalisieren? Das ist gar nicht so schwierig, wie es vielleicht klingt. Die axiomatische Methode war im Grunde seit der Axiomatisierung der Geometrie durch Euklid (ca. 300 v.Chr.) bekannt. Aber die Sprache bezeichnete Objekte (wenn auch in idealisierter Form: Punkte und Geraden) und die Axiome sollten evidente Aussagen ausdrücken. Da aber die moderne Mathematik abstrakte Begriffe behandelt, ist diese Auffassung der Axiomatik nicht zielführend. Die Postulate bezüglich der abstrakten Begriffe waren in dem Grundlagenstreit ja gerade der Stein des Anstoßes. Selbst die benutzte Logik (Prädikatenlogik erster Stufe) unterlag einer massiven Kritik.

Also wird in einem ersten Schritt die benutzte natürliche Sprache reduziert auf eine sehr enge, strikt regulierte Ausdrucksweise, die durch Formeln (regelmäßig gebildete, endliche Ketten von Symbolen) darstellbar ist. Die Gesamtheit der Formeln wird rekursiv aus den einfachsten aufgebaut. Dann werden Regeln zur Ableitung von Formeln aus schon gegebenen Formeln aufgestellt, die so beschaffen sind, daß aus Formeln, die wahren Aussagen entsprechen, stets Formeln folgen, die wieder wahren Aussagen entsprechen. Dabei hat aber der Wahrheitsbegriff nur für die elementarmathematischen Aussagen einen unmittelbaren Sinn, für die anderen hat er lediglich einen formalen Sinn.

Schließlich werden Axiome angegeben, die als Ausgangspunkt dienen. Mittels der Deduktionsregeln werden dann weitere Aussagen „bewiesen“. Ein solcher Beweis beruft sich nicht mehr auf (eine nicht mehr gegebene) unmittelbare inhaltliche Evidenz, sondern auf die Sicherheit eines dem Zahlenrechnen vergleichbaren „Rechenverfahrens“ mit endlichen Symbolketten. Hilberts Überzeugung war, daß es möglich sei, von einem solchen deduktiven System, das die moderne Mathematik nachbildet, zu zeigen, daß es konsistent ist, also keine Widersprüche produziert.

1.1.2. Gödel und Hilberts Programm. Gödel hat zwei wesentliche Beiträge zu diesem Projekt geleistet: er hat gezeigt, daß die reine Prädikatenlogik erster Stufe *vollständig* ist, d.h., daß alle Aussagen einer Sprache erster Stufe, die logisch wahr sind, durch formale Beweise auffindbar sind. Weiters hat er gezeigt, daß alle genügend ausdrucksfähigen formalen Systeme erster Ordnung (also eine geeignete Sprache erster Stufe plus geeignete Axiome als Ausgangspunkt der Deduktion) *unvollständig* sind. Das bedeutet, daß es in diesen Systemen Aussagen gibt, die zwar aus einer übergeordneten Werte gesehen wahr sein müssen, aber in dem System keinen Beweis haben.

Im zweiten Unvollständigkeitssatz wird das weiter präzisiert: unter milden Voraussetzungen an das System kann man die Konsistenz des Systemes innerhalb der

Sprache dieses Systems formulieren, aber diese im System liegende Aussage hat keinen Beweis, falls das System tatsächlich konsistent ist, d.h. wenn sie einen Beweis hat, führt die Aussage selbst zu einem Widerspruch im System.

Zu allem Überdruß steht das unter dem Vorbehalt der Konsistenz der elementaren Zahlentheorie, die selber außerstande ist, ihre eigene Konsistenz zu beweisen.

Das wird auch heute noch entweder als Unglück oder mit bedauernder Resignation gesehen. Eine Haltung, die ich nicht nachvollziehen kann. Die Vorstellung einer vollständigen Mathematik, die absolut endgültig vor uns liegt, wo es nur noch darum geht zunehmend komplizierte Beweise für zunehmend undurchsichtige Aussagen zu finden, schreckt mich ab. Stattdessen hat Gödel uns mit den Mitteln des mathematischen Denkens gezeigt, daß die Mathematik ein offenes Universum ist, in welchem wir nie an die endgültige Grenze stoßen werden. Mathematik bleibt ein nie zu vollendendes Abenteuer!

Es ist klar geworden, daß die Formalisierung ein nützliches Werkzeug, aber eben nicht die Essenz der Mathematik ist. In dem offenen Universum können wir uns nicht allein mit den Krücken des Formalismus fortbewegen, ohne uns zu Krüppeln zu machen. Vielleicht sind wir tatsächlich geistige „Krüppel“, aber wir brauchen uns das nicht vorschnell selbst einzureden.

1.2. Die Mengenlehre.

1.2.1. *Cantors Paradies.* Die Theorie an die Hilbert in letzter Konsequenz gedacht hat, war die Mengenlehre, die er in einem bekannten Ausspruch als das Paradies bezeichnet hat, aus dem er die Mathematiker nicht vertreiben lassen wollte. In dem Artikel *The present situation in the foundations of mathematics* (siehe Band III von [G]) hat Gödel klar herausgearbeitet, daß die Mengenlehre als eine transfinit iterierte, kumulative Typentheorie aufgefaßt werden kann, bei der eine explizite Typenunterscheidung (und die Vermeidung der Vermischung von Typen) überflüssig ist, weil sie implizit vorhanden ist (der Rang einer Menge). Die Theorie als Ganzes ist eine prädikatenlogische Theorie erster Stufe (es wird nur über die Objekte des Grundbereiches, also des Mengenuniversums) quantifiziert. Sie ist daher formalisierbar und besitzt einen logischen Kalkül, der alle Beweise liefert. Die Gefahr einer Antinomie vom Russellschen Typ ist durch die implizite Typenstruktur wohl gebannt (aus diesem Grund ist die axiomatisierte Version von Zermelo und anderen entwickelt worden). Vom „Sinngelalt“ her erweitert sie die Zahlentheorie, deren Resultate sie reproduziert aber noch weitergehende Ergebnisse liefert, z.B. die analytische Zahlentheorie.

Sie ist eine mathematische Theorie des Unendlichen. Sie ist aus der Beschäftigung Cantors mit der Eindeutigkeit von Fourier Reihen hervorgegangen, sehr bald hat er aber gesehen, daß dies viel mehr als ein spezifisches Werkzeug für ein spezielles mathematisches Problem ist. Da er über eine substantielle philosophische Bildung verfügte und an solchen Fragen interessiert war, insbesondere auch an theologischen Fragen, bekam die Mengenlehre für ihn bald einen philosophischen Stellenwert.

Die Haltung Gödels zur Mengenlehre, der er in seinen späteren Jahren größte Aufmerksamkeit hat zukommen lassen, wird allgemein (mit einem kritischen, oft herablassenden Ton) als „platonistisch“ bezeichnet. Dabei hat er selbst in dem genannten Artikel den Platonismus (in dem gerade erwähnten Sinne) als „intellektuell unbefriedigend“ bezeichnet. Aber er hat den Begriff der Menge als vergleichbar dem Begriff der Körper in der Physik als notwendiges Substrat für das mathematische

Denken betrachtet. Die Objekte der Physik, die Körper (also feste Körper, Flüssigkeiten, Gase, aber in der modernen Physik Atome, Elektronen, Protonen, Lichtquanten, Elementarteilchen) sind ganz offenbar ebenso „abstrakte“ Objekte, ohne die aber eine kohärente Theorie unmöglich zu entwickeln wäre.

Für meine Ausführungen bleibt festzuhalten, daß die Mengenlehre ein interessantes Amalgam zwischen einer mathematischen Theorie des Unendlichen und einer logischen Theorie ist. Als Ganzes ist sie von erster Stufe und damit formalisierbar, aber im Inneren verhalten sich geeignete Fragmente davon wie Prädikatenlogiken höherer Stufe. Die Superstrukturen der modelltheoretischen Variante der Nonstandard Mathematik sind Beispiele dafür.

1.2.2. *Die formale Theorie ZFC.* Die formalisierte Mengenlehre **ZFC** hat also einen logischen Kalkül, der auf den Formeln von **ZFC** operiert. Für den normal Ausgebildeten ist das Hantieren mit diesem formalen Kalkül mehr als gewöhnungsbedürftig, aber es lohnt sich, dies wirklich einmal an nichttrivialen Beispielen gemacht zu haben, um zu verstehen, was es bedeutet, daß unser mathematisches Denken einen „formalen Schatten“ besitzt. Einen solchen Schatten zu akzeptieren, ist nicht äquivalent zur formalistischen Sicht, daß nur dieser Schatten Mathematik sei.

In Hinblick auf eine spätere Anwendung sei hier folgendes Beispiel gegeben: die Formel

$$\exists x \forall y \in x \forall z (0 \in z \wedge (\forall u \in z u' \in z) \Rightarrow y \in z)$$

drückt aus, daß es eine Menge gibt, mit der Eigenschaft, daß alle ihre Elemente in allen Mengen enthalten sind, welche die 0 enthalten und abgeschlossen sind unter der Nachfolgerabbildung; d.h. wir stellen mit dieser Formel fest, daß es eine kleinste unendliche Menge gibt, die bekanntlich den Namen ω führt.

Nach den Regeln des Kalküls ist diese Formel äquivalent zu folgender Formel:

$$\exists x \forall y \in x \forall z \exists u \in z (0 \in z \wedge u' \in z \Rightarrow y \in z).$$

Die Änderung von $\forall u \in z$ in $\exists u \in z$ beim Übergang von der ersten zur zweiten Formel wird verursacht von der Quantorenregel $\neg \forall x \phi(x) \equiv \exists x \neg \phi(x)$ und der in der Implikation verborgenen Negation.

Da aber die formalen Systeme prinzipiell unvollständig sind, bietet sich als einzige Möglichkeit zur Weiterentwicklung solcher Systeme das sinnbehaftete, nicht formalisierte Denken an und das hat jahrtausendlang funktioniert¹. Warum dieser Prozeß an seinem Ende angelangt sein soll, ist mir unbegreiflich. Vielmehr bietet der Formalismus dabei seine Hilfe an. Geht man zwischen den verschiedenen Aspekten wie dem Sinn und dem Formalen hin und her, erreicht man einen tieferen Einblick in beide Aspekte.

Was sagen uns die Unvollständigkeitssätze über **ZFC**? Erstens, daß sich in **ZFC** die Konsistenz als eine Aussage in mengentheoretischer Sprache formulieren, aber nicht beweisen läßt, falls **ZFC** konsistent ist. Zweitens sagen sie uns, daß es, falls **ZFC** konsistent ist, Aussagen darin gibt, die unentscheidbar sind, d.h. es gibt keinen Beweis für die Aussage, aber es gibt auch keinen Beweis für die Verneinung.

Solche Aussagen sind mittels der Erzwingungsmethode zu finden und viele solche Aussagen, wie Cantors Kontinuumshypothese, sind mittlerweile bekannt. Für eine unentscheidbare Aussage gilt, daß sowohl die Aussage als auch ihre Verneinung zu einer konsistenten Theorie als Axiom hinzugenommen werden kann, ohne die

¹Dabei bezieht sich Sinn hier nicht auf die mengentheoretisch formalisierte Semantik im Sinne von Tarski!

entstehende erweiterte Theorie inkonsistent zu machen. Das gilt selbst dann, wenn aus einer höheren Warte die Aussage als wahr eingestuft wird, man könnte dennoch die Verneinung als Axiom hinzunehmen, ohne die Theorie inkonsistent zu machen.

Das wirkt auf den ersten Blick befremdlich, aber es zeigt nur wieder, daß wir ohne den Sinn nicht weiterkommen. Er mag uns auf falsche Fährten locken oder über Inkonsistenzen straucheln lassen, aber in einem solchen Fall hilft die Betrachtung des formalen Systems, um den Problemen auf die Schliche zu kommen. Ein formales System kann aus sich selbst heraus nur wenig Orientierung zu seiner eigenen Weiterentwicklung liefern. Eine kritische Betrachtung des formalen Systemes liegt selbst schon wieder außerhalb der formalen Sprache und greift auf infinitäre Betrachtungen zurück.

Ich halte es daher für völlig legitim, das formale System **ZFC** in wohlbestimmten Grenzen zu manipulieren, wenn dabei ein bisher ignorierter oder nur „schief“ erkannter Zug der Theorie sichtbar wird und sich mit einer historisch bekannten, aber verfrüht wieder verworfenen Sinndeutung verknüpfen läßt.

2. ERWEITERUNG VON **ZFC**

2.1. Syntaktische Spielereien.

2.1.1. *Erweiterung der Sprache.* Wir fügen zur $\in$ -Sprache das syntaktisch sich wie ein Prädikat verhaltende Sprachelement st hinzu. Wir unterscheiden nun zwischen internen Formeln und externen, die Erstgenannten sind Formeln der $\in$ -Sprache, die Letztgenannten sind Formeln der vollen Sprache. Was die Axiome betrifft lassen wir die Axiome von **ZFC** in $\in$ -Sprache in Kraft. Wir wollen diese formale Theorie durch **ZFC'** bezeichnen.

Was erreichen wir damit? Gar nichts! Dieses „Prädikat“ ist inhaltslos, es schwimmt beziehungslos in den Formeln. Die einzigen beweisbaren $\in$ -Sätze der erweiterten Theorie sind die Theoreme von **ZFC**. Unter den externen Formeln ergeben sich als Theoreme nur Aussagen, die logisch wahr sind, also vom Inhalt der Aussage ohnedies unabhängig.

Das können wir aber leicht ändern, indem wir ein Axiom hinzufügen, das in der Sinndeutung klarstellt, daß **alle** Mengen „standard“ sind:

$$(A) \quad \forall x \exists^{st} y (y = x).$$

Was haben wir damit erreicht? Eine jetzt nicht mehr jedes Sinnes bare Erweiterung, aber eine in einem offensichtlichen Sinne triviale Erweiterung. Diese (banale) Erweiterung bezeichnen wir durch **ZFC' + A**.

Wir erhalten weiterhin alle Theoreme von **ZFC**, aber wir erkennen auch unschwer, daß wir weitere beweisbare Theoreme erhalten. Dazu führen wir einen Begriff ein: es sei $\phi(y_1, \dots, y_m)$ eine $\in$ -Formel. Eine solche läßt sich (aus rein syntaktischen Gründen) in die sogenannte Pränex-Normalform umschreiben:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

wobei ψ eine quantorenfreie $\in$ -Formel ist und die Q_i für Quantoren ($\forall$ oder $\exists$) in irgendeiner Anordnung stehen. Jede Formel, die daraus durch Anbringen von st an einem oder mehreren der Quantoren entsteht, soll *Klon* von $\phi(y_1, \dots, y_m)$ heißen.

Es gilt nun ein ganzes Schema von Theoremen:

Theorem 2.1. *Es sei ϕ eine $\in$ -Aussage von **ZFC' + A**. Es sei ϕ' ein beliebiger Klon von ϕ . Es gilt $\phi \equiv \phi'$.*

Beweis. Offensichtlich, denn $\forall^{\text{st}}$ und $\forall$ bzw. $\exists^{\text{st}}$ und $\exists$ sind wegen **A** gleichbedeutend. $\square$

Corollary 2.2. *Eine externe Aussage ist ein Theorem von $\mathbf{ZFC}' + \mathbf{A}$ genau dann, wenn es sich um einen Klon eines $\mathbf{ZFC}$ -Theorems handelt.*

Im nächsten Schritt fügen wir die beiden Schemata Transfer **T** und Standardisierung **S** hinzu. Es ist vielleicht angebracht **S** in formaler Sprache anzugeben: Für jede Formel $\phi(x)$ mit einer freien Variablen und beliebigen Parametern gilt:

$$\forall X \exists^{\text{st}} Y \forall^{\text{st}} x (x \in Y \equiv x \in X \wedge \phi(x)).$$

Dann erhalten wir:

Theorem 2.3. *$\mathbf{ZFC}' + \mathbf{A} + \mathbf{T} + \mathbf{S}$ und $\mathbf{ZFC}$ sind beide in der jeweils anderen Theorie interpretierbar.*

Beweis. Interpretierbar sein heißt, es gibt ein effektives Verfahren um die Formeln des einen Systems in Formeln des anderen so zu transformieren, daß die Axiome des einen Theoreme des anderen Systems sind und Beweise des einen Systemes in Beweise des anderen überführt werden.

Hier sieht man leicht ein, daß $\mathbf{ZFC}$ interpretierbar ist in $\mathbf{ZFC}' + \mathbf{A} + \mathbf{T} + \mathbf{S}$. Dazu brauchen wir die Formeln von $\mathbf{ZFC}$ gar nicht zu transformieren, wir lesen sie einfach so wie sie sind als Formeln des zuletzt genannten Systems. Alle Axiome von $\mathbf{ZFC}$ sind trivialerweise Theoreme der letztgenannten Theorie, nämlich selbst Axiome dieser Theorie und jeder Beweis in $\mathbf{ZFC}$ geht so wie er ist in einen Beweis der anderen Theorie über.

Nicht so offensichtlich ist die andere Richtung. Die Umschreibung einer $\text{st} \in$ -Formel aus $\mathbf{ZFC}' + \mathbf{A} + \mathbf{T} + \mathbf{S}$ erfolgt so: man schreibt die Formel so um, daß st nur an Quantoren auftritt² und löscht alle an Quantoren klebenden st . Das ergibt eine Formel von $\mathbf{ZFC}$. Um die Erhaltung des Beweisverfahrens einzusehen, berufen wir uns auf Theorem 2.1. Durch die Transformation wird nur die überflüssige Erwähnung des Prädikates st entfernt, was auf die Deduktionsregeln keine Auswirkung hat.

Alle Axiome von $\mathbf{ZFC}' + \mathbf{A} + \mathbf{T} + \mathbf{S}$ sind nach Umschreibung entweder Axiome von $\mathbf{ZFC}$ und daher (trivialerweise) Theoreme von $\mathbf{ZFC}$ oder es handelt sich um eine Instanz von Transfer, die sich unter der Umschreibung auf die triviale Aussage reduziert, daß jede Formel zu sich selbst äquivalent ist, bzw. es handelt sich um die Umschreibung von Standardisierung, die eine Instanz von Separation liefert, was ebenfalls Theorem (nämlich sogar ein Axiom) von $\mathbf{ZFC}$ ist.

Als letztes bleibt **A**. Das aber wird bei der Umschreibung zu einer logisch wahren Aussage: zu jeder Menge gibt es eine ihr gleiche. $\square$

2.1.2. *Die Basistheorie $\mathbf{ZFC}''$.* Wir wollen jetzt die Theorie $\mathbf{ZFC}' + \mathbf{T} + \mathbf{S}$ durch $\mathbf{ZFC}''$ bezeichnen. Die Theorien $\mathbf{ZFC}$ und $\mathbf{ZFC}'' + \mathbf{A}$ sind also jede in der anderen interpretierbar. Daher sind sie äquikonsistent, weil ein Widerspruch in der einen sofort per Umschreibung in der anderen erscheinen würde. Aus der Warte der sinnbehafteten Metasprache „sprechen“ beide Theorien über das gleiche Mengenuiversum, obwohl sie formal verschieden aussehen.

Jetzt lassen wir das Axiom **A** fallen und betrachten $\mathbf{ZFC}$ und $\mathbf{ZFC}''$ nebeneinander. Die beiden sind nicht mehr jede in der anderen interpretierbar. Es gilt immer

²Das läßt sich aus syntaktischen Gründen immer bewerkstelligen.

noch, daß **ZFC** in **ZFC''** (trivial) interpretierbar ist, aber nicht mehr umgekehrt. Dennoch sind die beiden Systeme äquikonsistent:

Theorem 2.4. ***ZFC** und **ZFC''** sind äquikonsistent.*

Beweis. Wenn **ZFC** inkonsistent ist, dann zeigt die Interpretation in **ZFC''** den Widerspruch auch in diesem System. Wenn **ZFC''** inkonsistent ist, dann bleibt das System nach Addition von **A** als Axiom inkonsistent. Die Interpretation dieses erweiterten Systems in **ZFC** zeigt dann den Widerspruch in diesem System. $\square$

Damit haben wir ein System vor uns, das wegen des Wegfalles von **A** unbestimmt ist, weil st keine Bedeutung besitzt und vermutlich auf verschiedene Weise mit Inhalt versehen werden könnte. Aber die Basistheorie ist äquikonsistent zur herkömmlichen Mengenlehre.

Diese Unbestimmtheit wird behoben, indem ein drittes Axiom hinzugefügt wird. Bevor das geschieht, soll aber noch kurz auf die Theorie IST eingegangen werden.

2.1.3. *Die Theorie IST.* Diese Theorie enthält ein etwas verändertes Standardisierungsaxiom.

S': Für jede beliebige st- $\in$ -Formel $\phi(x)$ mit einer freien Variablen und beliebigen Parametern gilt

$$\forall^{\text{st}} X \exists^{\text{st}} Y \forall^{\text{st}} x (x \in Y \equiv x \in X \wedge \phi(x)).$$

Es wird also nur noch für standard Mengen X die Aussage gemacht.

Auch für die Theorie **ZFC'** + **A** + **T** + **S'** gilt eine zu 2.3 analoge Aussage und daher ist **ZFC'** + **T** + **S'**, die wir durch **ZFC'''** bezeichnen wollen, äquikonsistent bezüglich **ZFC**.

Als drittes Axiomenschema wird folgendes Idealisierungsschema hinzugefügt:

I: zu jeder $\in$ -Formel $\phi(x, y)$ mit zwei freien Variablen und beliebigen Parametern gilt

$$\forall^{\text{st fin}} A \exists X \forall y \in A \phi(X, y) \Rightarrow \exists X \forall^{\text{st}} y \phi(X, y).$$

Dieses nicht sehr einleuchtende Axiom hat schockierende Konsequenzen, die unterstreichen, daß zwischen dem formalen Kalkül und der sinnhaften Interpretation eine Lücke klafft. Es gilt zum Beispiel folgende Aussage: es gibt eine endliche Menge, die alle standard Mengen als Elemente enthält.

Man erkennt das ganz leicht: sei $\phi(X, y) :\equiv y \in X \wedge \text{fin}(X)$. Dann ist die linke Seite der Implikation trivialerweise erfüllt wenn man $A = X$ setzt. Also gibt es eine **endliche** Menge X , die alle standard Mengen enthält. Diese Menge X ist nicht standard, weil sie ja sonst $X \in X$ erfüllen müßte, was dem Regularitätsaxiom widerspricht. Es gibt auch aus dem selben Grund keine standard Menge Y , die diese Menge X als Element enthält.

Wenn wir also die nonstandard Mengen als ideale Mengen auffassen, dann sehen wir, daß die Gesamtheit aller nicht idealen Mengen in einer endlichen (idealen) Menge enthalten ist. Das ist für eine sinnbehaftete Interpretation eine ziemlich irritierendes Faktum. Dennoch ist **IST** äquikonsistent bezüglich **ZFC**.

Man sieht jetzt auch, warum das Standardisierungsaxiom **S'** von **IST** nur von standard Mengen ausgehen darf. Mit **S** würde man sofort einen Widerspruch erhalten, denn die Menge X , die oben als existent erkannt wurde, kann keine standard Menge liefern, die alle standard Mengen aus X enthält, da sie dann alle standard Mengen enthalten würde und wegen Transfer dann sogar alle Mengen.

2.2. Die Theorie BST.

2.2.1. *Zurück zu ZFC''*. Wir beweisen ein Theorem von **ZFC''**:

Theorem 2.5. *In ZFC'' ist folgende Aussage beweisbar:*

$$\mathbf{A} \Rightarrow \exists X \exists \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) (\forall^{\text{st}} Z \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) Z \in \mathcal{Y} \wedge \forall Z \in \mathcal{Y} \exists^{\text{st}} x \in X x \notin Z).$$

Beweis. Es handelt sich bei dem hinteren Glied der Implikation um den Klon eines Theoremes von ZFC: es gibt Mengen X und es gibt Untermengen $\mathcal{Y}$ der Menge aller endlichen Untermengen von X , so daß $\mathcal{Y} = \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ ³ und keine endliche Untermenge von X , die in $\mathcal{Y}$ enthalten ist, schöpft die Menge X aus. Als Mengen X von denen hier die Rede ist, eignen sich offenbar beliebige unendliche Mengen.

Aus Korollar 2.2 folgt $\mathbf{A} \Rightarrow (\Phi \equiv \Phi')$, oder durch Umschreiben $\mathbf{A} \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Phi') \wedge (\Phi \Leftarrow \Phi')$. Daraus folgt durch aussagenlogische Argumente $\Phi \Rightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \Phi')$ und nach der Ersetzung

$$\Phi := \exists X \exists \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) (\forall Z \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) Z \in \mathcal{Y} \wedge \forall Z \in \mathcal{Y} \exists x \in X x \notin Z)$$

erhalten wir⁴

$$\mathbf{ZFC''} \vdash (\mathbf{A} \Rightarrow \Phi')$$

mit $\Phi' := \exists X \exists \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) (\forall^{\text{st}} Z \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) Z \in \mathcal{Y} \wedge \forall Z \in \mathcal{Y} \exists^{\text{st}} x \in X x \notin Z)$ $\square$

Mittels Kontraposition schließen wir daraus:

Corollary 2.6. *In ZFC'' ist die folgende Aussage beweisbar:*

$$\forall X \forall \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) (\forall^{\text{st}} Z \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) Z \in \mathcal{Y} \Rightarrow \exists Z \in \mathcal{Y} \forall^{\text{st}} x \in X x \in Z) \Rightarrow \neg \mathbf{A}.$$

Wir wollen das vordere Glied der Implikation mal wieder in natürliche Sprache übersetzen. Für jede Menge X und jede Menge $\mathcal{Y}$ von endlichen Untermengen von X folgt aus der Feststellung, daß alle standard endlichen Untermengen von X in $\mathcal{Y}$ enthalten sind, daß $\mathcal{Y}$ ein Element, also eine endliche Untermenge von X enthält, die schon alle standard Elemente von X enthält.

Das aber ist doch gerade das Finitisierbarkeitsaxiom, das wir durch **F** abkürzen wollen. Und nun fällt alles an seinen Platz. Die Addition von **F** als Axiom zwingt die erweiterte Theorie **ZFC''** + **F** die Existenz von nonstandard Objekten (das sagt ja $\neg \mathbf{A}$) zu beweisen.

Die Theorie **ZFC''** + **F** ist **BST**. Die in [3] angegebenen Axiome lassen sich in **ZFC''** + **F** beweisen und umgekehrt.

2.2.2. *Die Preisfrage.* Leider verrät uns das Deduktionstheorem nicht, ob wir beim Hinzufügen von **F** zur Theorie **ZFC''** als zusätzliches Axiom nicht eine inkonsistente Theorie erhalten. Damit sind wir nun bei des Pudels Kern angelangt. Das relevante Faktum ist nämlich folgendes: es gilt stets die folgende Alternative wenn man eine formale Theorie T vor sich hat: entweder eine Aussage ϕ in der Sprache von T ist beweisbar, oder $\neg \phi$ ist beweisbar (man sagt ϕ ist widerlegbar), oder weder das eine noch das andere tritt ein. In diesem letzten Fall sagt man ϕ sei *unentscheidbar*.

Eine simple Überlegung zeigt nun, daß **ZFC''** + **F** genau dann inkonsistent ist, wenn **ZFC''** bereits imstande ist $\neg \mathbf{F}$ zu beweisen. Wenn es gelänge einen rein syntaktischen Beweis zu finden, daß es nur mit Hilfe von **T** und **S** und den **ZFC**-Axiomen nicht gelingen kann, $\neg \mathbf{F}$ zu beweisen (der Beweis weiter oben stützte sich

³Diese scheinbar konfuse Formulierung mit Einführung der Menge $\mathcal{Y}$, die dann festgelegt wird, hat aber ihren Sinn, der sich gleich herausstellen wird.

⁴ $\vdash$ steht für „beweist“

ja ganz wesentlich auf **A**), dann wäre die relative Konsistenz von **BST** bewiesen, ohne eine Ultrapotenz auch nur von Ferne gesehen zu haben, geschweige denn von ihrer Existenz überhaupt etwas zu wissen.

Einen solchen Beweis habe ich nicht, aber man kann ja mal abschätzen, welche Chancen man hat:

- (1) Die Behauptung, daß $\neg \mathbf{F}$ in $\mathbf{ZFC}''$ nicht beweisbar ist, ist sicher richtig, weil ja auf andere Weise die Konsistenz von **BST** schon bewiesen ist.
- (2) Um einen Klon eines **ZFC**-Theorems in $\mathbf{ZFC}''$ zu beweisen muß man **T** und **S** verwenden, sonst hat man nur Zugriff auf $\in$ -Theoreme. Aber **T** allein genügt auch nicht, denn damit kann man immer nur st an die Quantoren ankleben, indem man von links außen nach innen fortschreitet, das st in $\neg \mathbf{F}$ steht aber an den Quantoren des innersten Niveaus.
- (3) Benötigt wird also eine (syntaktische) Charakterisierung der Form aller st - $\in$ -Theoreme von $\mathbf{ZFC}''$, aus der erkennbar wird, daß $\neg \mathbf{F}$ nicht von der entsprechenden Form ist. Das erscheint schwierig, aber nicht unmöglich.
- (4) Ein solcher Beweis würde zeigen, daß die Ultrapotenz mit einem syntaktischen Faktum in Verbindung steht.

Jetzt ist auch klar, warum so etwas wie **BST** nur möglich ist, wegen der Unvollständigkeit aller hinreichend starken formalen Theorien erster Stufe und ihrer Nichtkategorizität. Wenn Hilberts Traum realisierbar wäre, dann wäre vermutlich **ZFC** ein Kandidat für eine vollständige, kategorische Theorie. Dann würde die Einführung des Prädikates st und des Transferprinzips aber bereits beweisbar zu der Aussage $\forall x \exists^{\text{st}} y = x$ führen, da sonst zwei nicht isomorphe Versionen von **ZFC** erscheinen würden. Also wäre es unmöglich, **F** als Axiom hinzuzufügen, es würde die Theorie inkonsistent machen.

2.2.3. Metamathematische Eigenschaften von **BST.** Die hervorstechenden Eigenschaften von **BST** sind die Äquikonsistenz bezüglich **ZFC** und die Reduzibilität:

Proposition. (*Reduzibilität*) Jede st - $\in$ -Aussage über standard Mengen $a_1, \dots, a_n$ läßt sich effektiv umwandeln in eine $\in$ -Aussage über eben diese Mengen.

Dieser Satz ist die präzise, metamathematische Formulierung von Leibnizens Kommentar *c'est une façon de parler*. Nur daß Leibniz über die reellen Zahlen und Funktionen auf diesen gesprochen hat, während dieser Satz sich auf die Mengenlehre insgesamt bezieht.

BST und **IST** stehen in einem engen Zusammenhang; dazu benötigen wir den Begriff der beschränkten Mengen. Eine Menge in **IST** heißt *beschränkt*, wenn sie Element einer standard Menge ist. In **IST** gibt es, wie wir weiter oben gesehen haben, unbeschränkte Mengen. Die Mengen von **BST** hingegen sind alle beschränkt.

Proposition. **BST** ist eine Untertheorie von **IST**: eine Aussage ϕ in **BST** ist ein Theorem dieser Theorie dann und nur dann, wenn die Relativierung von ϕ auf beschränkte Mengen ein Theorem von **IST** ist. In diesem Sinne ist **BST** die Theorie der beschränkten Mengen von **IST**.

In **BST** gilt Separation nicht für Prädikate der st - $\in$ -Sprache. Die logischen Extensionen dieser Prädikate bleiben also auf der Ebene der Metasprache. Das ist ein gravierender Nachteil in Hinblick auf die Fixierung auf die Extensionalität im mathematischen Denken. Aber es stellt sich heraus, daß – wenn auch indirekt – diese Extensionen aus **BST** heraus kontrollierbar sind.

Proposition. (*Externe Struktur*) Es sei eine beliebige $\text{st-}\in$ -Formel $\phi(x)$ und S eine Menge, dann gibt es ein Tripel $\langle A, B, X \rangle$, A und B standard Mengen und eine Familie $\{X_{a,b} : a \in A \wedge b \in B\}$, so daß

$$x \in S \wedge \phi(x) \equiv \exists^{\text{st}} a \in A \forall^{\text{st}} b \in B x \in X_{a,b}.$$

Das bedeutet, daß jede logische Extension eines externen Prädikates, eingeschränkt auf eine beliebige Menge, immer durch ein Tripel $\langle A, B, X \rangle$ parametrisiert werden kann. Damit lassen sich insbesondere die Quantoren über externe Extensionen von der Ebene der Metasprache auf die Ebene der formalen Sprache zuückverlegen.

Weder Reduzibilität noch Externe Struktur gelten für **IST**. Das bietet eine interessante Perspektive darauf, wie Erweiterungen eines logischen Kalküls (hier von **ZFC**) dramatische Auswirkungen auf den ins Auge gefaßten Sinngehalt haben. Diese Interaktion ist noch nicht systematisch studiert worden (vermutlich, weil es nicht „in“ ist von Sinngehalt jenseits einer mengentheoretisch formalisierbaren Semantik zu sprechen). Im nächsten Unterabschnitt führen wir diesen Gedanken weiter und imitieren die „Sternchenmathematik“, aber wieder über der gesamten Mengenlehre.

2.2.4. Hrbáček Set Theory (HST). In **BST** kann man nicht von der Menge aller Infinitesimalen in $\mathbb{R}$ sprechen, auch nicht von der Menge der standard reellen Zahlen, weil die „nicht idealen“ Mengen nicht-extensional in die Erweiterung um „ideale“ Mengen eingebettet sind. In der Sternchenmathematik gilt das auch, aber dort ist die Erweiterung in ein artifizielles Mengensystem eingebunden, das selbst in der Mengenlehre eingebettet erscheint.

Das Theorem Externe Struktur erlaubt uns aber zumindest die logischen Extensionen innerhalb des Mengenuniversums von **BST** zu parametrisieren und damit zu kontrollieren. Sobald dieser Schritt geleistet ist, kann man die $\in$ -Struktur in definierter Weise auf diese Objekte ausdehnen, indem man $=$ und $\in$ durch externe Formeln von **BST** definiert, in denen die Parametertripel erscheinen. Dann möchte man aber auch „externe Mengen“ von solchen „externen Mengen“ etc. bilden können, also das „externe“ Mengenuniversum unbeschränkt entfalten.

Das geht tatsächlich und führt zu einer Theorie, die sich nicht wesentlich von einer der von Hrbáček 1978 vorgeschlagenen Theorien unterscheidet, für die jedoch der von ihm gegebene Äquikonsistenzbeweis sehr schwierig ist. Die Wahl des Namens Hrbáček Set Theory (**HST**) erklärt sich aus diesem historischen Hintergrund. Diese Theorie kann man auf zwei ganz verschiedene Weisen interpretieren; eine könnte sich an der hier gegebenen Sicht von **BST** anlehnen, während die andere sich an der „Sternchenmathematik“ orientiert. Danach handelt es sich um eine Mengentheorie, in der eine Stratifizierung des Mengenuniversums vorliegt: eine Ebene besteht aus wohlfundierten Mengen, die ein **ZFC**-Universum bilden. Darüber liegen zwei Ebenen, die der standard Mengen, die das $\in$ -isomorphe Bild der wohlfundierten unter einer (natürlich) $*$ -Abbildung genannten Abbildung sind, welche Ebene ihrerseits eingebettet ist in die dritte Ebene der internen Mengen, die aus allen Elementen der standard Mengen besteht. Die Gesamtheit der internen Mengen bildet eine elementare Erweiterung der Gesamtheit der standard Mengen und schließlich erscheinen noch externe Mengen, die durch Separation beliebiger Formeln entstehen. Die Analogie zur „Sternchenmathematik“ ist vollständig, jedoch gibt es nicht zwei $\in$ -Relationen, sondern nur eine und das ganze System ist frei von „Konstruktionsparametern“ (Saturation).

Der Preis für dieses System ist der, daß das Universum sehr viel komplizierter ist, als das **ZFC**-Universum und insbesondere nicht mehr alle **ZFC**-Axiome erfüllen kann, obwohl die **ZFC**-Axiome relativiert auf jede der drei Ebenen jeweils alle gelten.

3. AUSKLANG

Nach so viel Theorie jetzt zum Abschluß einige elegante Rechnungen:

3.1. Die geometrische Reihe.

Lemma 3.1. *Es sei $|q| \ll 1$, dann ist $q^N \approx 0$ für alle großen (d.h. nonstandard) N .*

Beweis. Für $q = 0$ ist nichts zu beweisen. Also sei $q \neq 0$. Die Zahl $\frac{1}{|q|} \gg 1$ läßt sich schreiben als $1 + a$ mit $a \gg 0$. Also gilt $\frac{1}{|q|^n} = (1 + a)^n > 1 + n \cdot a$. Für alle großen N folgt daher $\frac{1}{|q|^N}$ ist groß und daher $|q|^N \approx 0$. $\square$

Corollary 3.2. *Die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ konvergiert für $|q| \ll 1$ und ihr Wert ist gegeben durch $\circ \left(\sum_{i=0}^N q^i \right) = \circ \left(\frac{q^{N+1}-1}{q-1} \right) = \frac{1}{1-q}$.*

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß (1) die Reihenreste für große Indizes infinitesimal sind und (2) alle Summen $\sum_{i=0}^N q^i$ mit großen Indizes N begrenzt sind.

- (1) Die Reihenreste für große Indizes haben die Form $\sum_{i=M+1}^N q^i$ und diese haben gemäß der algebraischen Summenformel die Gestalt $\frac{q^{N+1}-q^{M+1}}{q-1}$. Gemäß dem Korollar ist das infinitesimal.
- (2) Wegen $\left| \sum_{i=0}^N q^i \right| \leq \sum_{i=0}^N |q|^i$ genügt es den Fall $q > 0$ zu diskutieren. Aber es gilt $\sum_{i=0}^N |q|^i = \frac{|q|^{N+1}-1}{q-1}$ und da $|q|^{N+1} \approx 0$ und $|q| \ll 1$ ist der ganze Ausdruck begrenzt. $\square$

3.2. Die Exponentialfunktion. Das folgende technische Lemma wird benötigt.

Lemma 3.3. *Wenn $\phi(m, n)$ eine $\in$ -Aussage für natürliche Zahlen ist und die Aussage für alle standard m, n gilt, dann gibt es eine nonstandard Zahl N , so daß für alle $m, n \leq N$ gilt $\phi(m, n)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt, daß die Menge $\{k : \forall m, n \leq k \phi(m, n)\}$ alle standard Zahlen k enthält und daher nach den Überschußprinzipien auch eine nonstandard Zahl N . $\square$

Wir definieren eine Funktion: $\exp_N(x) := \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ für eine beliebige, große Zahl N . Diese Funktion ist überall definiert.

Lemma 3.4. *Für alle begrenzten x ist $\exp_N(x)$ begrenzt und es gilt für beliebiges, großes M*

$$\exp_N(x) \approx \sum_{i=0}^M \frac{x^i}{i!}.$$

Beweis. Es ist zu zeigen, daß (1) $\exp_N(x)$ für jedes begrenzte x begrenzt ist, (2) für alle großen Indizes M, N gilt $\sum_{i=0}^M \frac{x^i}{i!} \approx \sum_{i=0}^N \frac{x^i}{i!}$, und (3) es einen großen Index K gibt, so daß $\exp_N(x) \approx \sum_{i=0}^K \frac{x^i}{i!}$.

- (1) Sei x begrenzt. Es gilt $(1 + \frac{x}{N})^N = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (\frac{x}{N})^i$. Daraus folgt mittels der Dreiecksungleichung, daß es genügt, die Behauptung für $x \geq 0$ zu beweisen. Es gilt

$$\sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (\frac{x}{N})^i = \sum_{i=0}^N \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) \frac{x^i}{i!},$$

wobei $\prod_{j=0}^{i-1} (1 - \frac{j}{N})$ den Wert 1 haben soll. Daraus ergibt sich die gewünschte Begrenzung:

$$\sum_{i=0}^N \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) \frac{x^i}{i!} \leq \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{q^{N-n} - 1}{q - 1},$$

wobei $0 < q = \frac{x}{n+1} < 1$ für ein passendes standard n mit $n \geq x$. Wie schon gezeigt ist dann $q^{N-n} \approx 0$.

- (2) Es sei $M \leq N$. Die Behauptung folgt aus den Abschätzungen

$$0 \leq \sum_{i=M+1}^N \frac{x^i}{i!} \leq \frac{x^{M+1}}{(M+1)!} \sum_{i=M+1}^N \left(\frac{x}{M+1}\right)^{i-M-1}$$

und

$$0 \leq \frac{x^{M+1}}{(M+1)!} \leq \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{M+1-n} \approx 0,$$

wobei n wie in (1) gewählt ist.

- (3) Mittels externer Induktion folgt, daß für alle standard n gilt $\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \frac{j}{N}) \approx 1$. Damit erhalten wir

$$\left| \sum_{i=0}^N \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=n+1}^N \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) \frac{x^i}{i!} \right| < \frac{1}{n}$$

für alle standard n und daher auch für alle n bis zu einem großen Index K , den wir kleiner als N wählen dürfen. Da schließlich

$$0 < \sum_{i=K+1}^N \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) \frac{x^i}{i!} \leq \sum_{i=K+1}^N \frac{x^i}{i!} \approx 0$$

gilt, erhalten wir $\sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (\frac{x}{N})^i \approx \sum_{i=0}^K \frac{x^i}{i!}$.

□

Lemma 3.5. Die Funktionen $\exp_N$ für große N sind überall s -stetig, d.h. aus $x \approx y$ folgt stets $\exp_N(x) \approx \exp_N(y)$. Außerdem sind diese Funktionen überall s -differenzierbar, und zwar gilt bei $x \neq y$

$$\frac{\exp_N(x) - \exp_N(y)}{x - y} \approx \exp_N(x)$$

für alle x, y in einer begrenzten Monade.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \exp_N(x) - \exp_N(y) &= \exp_N(x) \left(1 - \left(\frac{N+y}{N+x} \right)^N \right) = \\ &= \exp_N(x) \left(1 - \left(1 + \frac{y-x}{N+x} \right)^N \right) = \exp_N(x) \left(1 - \exp_N \left(\frac{N(y-x)}{N+x} \right) \right). \end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch zu klären, daß $\exp_N(\delta) \approx 1$ ist für $\delta \approx 0$. Diese Behauptung ist aber schon im Beweis des vorangehenden Lemma enthalten: $\exp_N(\delta) \approx 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\delta^i}{i!}$ und

$$\left| \sum_{i=1}^N \frac{\delta^i}{i!} \right| \leq \sum_{i=1}^N \frac{|\delta|^i}{i!} \leq |\delta| \frac{|\delta|^N - 1}{|\delta| - 1} \approx 0$$

□

Lemma 3.6. *Der Standardschatten von $\exp_N$ ist die Funktion $\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$.*

Beweis. Unmittelbare Folge aus den vorangehenden Ergebnissen. □

Die Funktion $\exp_N$ ist eine „ideale Funktion“, deren Gegenstück in der „nicht-idealen“ Mengenwelt die Exponentialfunktion ist. Das verwirrende an dieser Situation ist, daß alle konkreten Rechnungen tatsächlich mit den Versionen $\exp_n$ für standard n und anderen Approximationen durchgeführt werden. Eigentlich ist die Exponentialfunktion eine „ideale“ Funktion, die sich durch ihre Einfachheit im Kalkül der Funktionen auszeichnet. „Ideal“ und „real“ sind nicht absolut, sondern nur relativ zu verstehen. Die nonstandard („idealen“) Mengen von **BST** sind nur „ideal“ relativ zu den als „real“ betrachteten Mengen der gewöhnlichen Mengenlehre. Und die „ideale Funktion“ $\exp_N$ ist selbst wieder eine auf andere Weise „idealisierte“ Version der Funktionen $\exp_n$ und ähnlicher Approximationen, mit denen numerisch gerechnet wird.

Man kann also sagen, daß man in der Sprache von **BST** näher an den Intuitionen des Mathematikers und in einer „idealisierten“ Weise auch näher an der numerischen Mathematik ist, als in der eleganten, aber abstrakten Sprache der Mengenlehre. Das Festhalten an verkappten „platonistischen“ Vorstellungen von der Mengenwelt als „wirklich“ oder der Vorstellung damit in der formalistisch „richtigen“ Weise Mathematik zu betreiben wird gerade durch diese Theorie auf besonders eindringliche Weise in Zweifel gezogen.

3.3. Robinsons Lemma. In den Rechnungen der letzten beiden Abschnitte spielt ein schon von Robinson entdecktes Lemma eine wichtige Rolle, das wir dort nur implizit verwendet haben (Lemma 3.3):

Lemma 3.7. *(Robinsons Lemma) Wenn eine Folge $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ gegeben ist, deren Glieder mit standard Index alle infinitesimal sind, dann gibt es eine große Zahl N , so daß $a_i \approx 0$ für alle $i \leq N$.*

Beweis. Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \forall k \leq n \ |a_k| < \frac{1}{k}\}$ enthält alle standard n und daher auch ein großes N . Aber für alle großen $M \leq N$ ist $\frac{1}{M}$ infinitesimal. □

Wegen der Reduzibilität von **BST** muß es möglich sein, die Aussage von Robinsons Lemma in eine äquivalente Aussage in $\in$ -Sprache zu verwandeln. Das soll jetzt ausgeführt werden, damit sichtbar wird, welche mengentheoretischen Inhalte hinter diesem Lemma stehen, insbesondere, ob Ultrapotenzen dabei irgendeine Rolle spielen könnten.

Zuerst müssen wir aus Finitisierbarkeit eine Folgerung herleiten.

Theorem 3.8. *Es sei $F : A_0 \rightarrow X$ eine Abbildung. Es gilt folgende Implikation:*

$$\forall^{\text{st fin}} A \subset A_0 \exists x \in X \forall a \in A x \in F(a) \Rightarrow \exists x \in X \forall^{\text{st}} a \in A_0 x \in F(a).$$

Beweis. Die Menge $M := \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A_0) : \exists x \in X \forall a \in A x \in F(a)\}$ enthält wegen der linken Seite der Implikation alle standard finiten Mengen, daher enthält M eine endliche Untermenge A'_0 von A_0 , die alle standard Elemente von A_0 enthält. Für die gilt dann $\exists x \in X \forall a \in A'_0 x \in F(a)$, was die Behauptung $\exists x \in X \forall^{\text{st}} a \in A_0 x \in F(a)$ impliziert. $\square$

Corollary 3.9. *Unter der gleichen Voraussetzung wie im Theorem zuvor gilt:*

$$\forall x \in X \exists^{\text{st}} a \in A_0 x \in F(a) \Rightarrow \exists^{\text{st fin}} A \subset A_0 \forall x \in X \exists a \in A x \in F(a).$$

Beweis. Durch Kontraposition der zuvor bewiesenen Implikation mit F ersetzt durch $G(a) := X \setminus F(a)$. $\square$

Im Theorem und seinem Korollar gilt die umgekehrte Richtung der Implikation aus trivialen Gründen, so daß man eigentlich ein Äquivalenzzeichen dorthin setzen könnte.

Jetzt führen wir noch einige Abkürzungen ein. Für eine Folge (d.h. eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in die reellen Zahlen) schreiben wir $a_\cdot$. Weiters führen wir eine Abbildung A von den Folgen in Paare von natürlichen Zahlen ein:

$$A(a_\cdot) := \left\{ \langle i, k \rangle : \forall j \leq i \ |a_j| < \frac{1}{k+1} \right\}.$$

Diese Abbildung ist standard, da alle Parameter (die Abbildung $x \mapsto |x|$ und die Relation $<$) in ihr standard sind. Weiters führen wir die folgende Abbildung von Mengen von Paaren von natürlichen Zahlen auf natürliche Zahlen ein:

$$D(M) := \{n : \forall k \leq n \ \langle k, k \rangle \in M\}.$$

Auch D ist eine standard Abbildung.

Jetzt schreiben wir Robinsons Lemma in eine Formel um:

$$\forall a_\cdot \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (\forall^{\text{st}} \langle i, k \rangle \ \langle i, k \rangle \in A(a_\cdot) \Rightarrow \exists N \ (N \in D(A(a_\cdot)) \wedge \forall^{\text{st}} j \ j \leq N)).$$

Dazu überlegen wir uns, daß $\forall^{\text{st}} \langle i, k \rangle \ \langle i, k \rangle \in A(a_\cdot)$ nichts anderes aussagt, als $a_\cdot$ ist eine „Robinson Folge“: Einsetzen der Definition von A liefert ja $\forall^{\text{st}} \langle i, k \rangle \ \forall j \leq i \ |a_j| < \frac{1}{k+1}$ und das impliziert, daß für festes standard i , die Ungleichung $\forall j \leq i \ |a_j| < \frac{1}{k+1}$ für alle standard k gilt, also sind alle a_i mit standard i infinitesimal.

Ebenso sehen wir ein, daß das Hinterglied der Implikation behauptet, daß die a_i infinitesimal sind für alle $i \leq N$ mit einer nonstandard Zahl N .

Unser Ziel ist es, die st aus der Formel zu entfernen. Dazu müssen wir die externen Quantoren alle ganz nach links schaffen um dann Transfer anzuwenden. Wir beginnen mit der Kombination von Quantoren im rechten Teil der Formel:

$$\exists N \forall^{\text{st}} j \ (j \leq N \wedge N \in D(A(a_\cdot))).$$

Das formen wir trivial um zu $\forall^{\text{st}} j \exists N (j \leq N \wedge N \in D(A(a_)))$, denn diese Form ist doch erfüllt, wenn wir für jedes standard j immer jenes N wählen, dessen Existenz die ursprüngliche Formel sicherstellt. Wir können aber auch wieder zur alten Formel zurückkehren, indem wir bemerken, daß unter standard endlich vielen standard j das zum größten davon gehörende N für alle kleineren j auch funktioniert. Daher gilt dann die Formel $\forall^{\text{st fin}} J \subset \mathbb{N} \exists N \forall j \in J (j \leq N \wedge N \in D(A(a_)))$. Wenn wir darauf das Theorem 3.8 anwenden, kommen wir wieder zur ursprünglichen Formel. Die beiden Formeln, in denen einmal $\forall^{\text{st}} j \exists N$ und einmal $\exists N \forall^{\text{st}} j$ vor dem Kern stehen sind daher äquivalent.

Mit dieser Transformation haben wir jetzt Robinsons Lemma in folgende äquivalente Form umgeformt:

$$\forall^{\text{st}} j \forall a. \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (\forall^{\text{st}} \langle i, k \rangle \langle i, k \rangle \in A(a.) \Rightarrow \exists N (N \in D(A(a.)) \wedge j \leq N)).$$

Dabei haben wir benutzt, daß Quantoren aus dem Hinterglied der Implikation, deren gebundene Variable nicht im Vorderglied vorkommen, einfach nach vorne gezogen werden können. Bei dem Vorderglied kommt es jedoch beim Herausziehen nach vorne zur Umkehr des Quantors, also aus $\forall$ wird $\exists$ und umgekehrt. Damit erhalten wir nunmehr:

$$\forall^{\text{st}} j \forall a. \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \exists^{\text{st}} \langle i, k \rangle ((\langle i, k \rangle \in A(a.) \Rightarrow \exists N (N \in D(A(a.)) \wedge j \leq N)).$$

Jetzt attackieren wir im gleichen Stil die Formel

$$\forall a. \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \exists^{\text{st}} \langle i, k \rangle ((\langle i, k \rangle \in A(a.) \Rightarrow \exists N (N \in D(A(a.)) \wedge j \leq N)),$$

indem wir Korollar 3.9 anwenden. Zwecks Vereinfachung setzen wir

$$\psi(a., \langle i, k \rangle, N, j) := ((\langle i, k \rangle \in A(a.) \Rightarrow \exists N (N \in D(A(a.)) \wedge j \leq N))$$

Damit kommen wir insgesamt zu:

$$\forall^{\text{st}} j \exists^{\text{st fin}} P \subset \mathbb{N}^2 \forall a. \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \exists \langle i, k \rangle \in P \psi(a., \langle i, k \rangle, N, j).$$

Und nun schließen wir den Vorgang ab: alles, was rechts der Quantoren als Parameter vorkommt, ist standard, also dürfen wir die st einfach wegstreichen:

$$\forall j \exists^{\text{fin}} P \subset \mathbb{N}^2 \forall a. \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \exists \langle i, k \rangle \in P \psi(a., \langle i, k \rangle, N, j).$$

Das ist die $\in$ -Aussage, die äquivalent zu Robinsons Lemma ist! Sieht sehr kompliziert aus, aber wir können das leicht aufklären, indem wir schrittweise vorgehend die Formel als erfüllbar nachweisen, wobei wir dann sehen, daß ihr Inhalt banal ist und mit Ultrapotenzen nichts, aber auch gar nichts zu tun hat:

- (1) Wir wählen eine beliebige natürliche Zahl j .
- (2) Wir wählen zu j die endliche Menge $P = \{\langle i, k \rangle : i \leq j \wedge k \leq j\}$.
- (3) Wir verschieben $\exists \langle i, k \rangle$ wieder in den Kern der Aussage, wobei der Quantor sich wieder in den anderen verwandelt:

$$\forall \langle i, k \rangle \langle i, k \rangle \in A(a.) \Rightarrow \exists N (N \in D(A(a.)) \wedge j \leq N).$$

- (4) Das sagt nun, wenn alle $\langle i, k \rangle \in P$ d.h. $i, k \leq j$, so beschaffen sind, daß für die gewählte beliebige Folge immer gilt $\forall m \leq i \mid a_m \mid < \frac{1}{k+1}$, dann muß es ein N geben, das größer oder gleich ist dem j , so daß für alle $k \leq N$ gilt $\langle k, k \rangle \in A(a.)$, d.h. $\forall m \leq k \mid a_m \mid < \frac{1}{k+1}$.

- (5) Das erfüllen wir leicht, indem wir setzen $N = j$. Denn die in 4. formulierte Hypothese beinhaltet doch bei dieser Festsetzung, daß gilt $\forall m \leq N \ |a_m| < \frac{1}{N+1}$. Für dieses $N = j$ wird im Grunde nur behauptet, daß die Menge P die Diagonale $\{\langle k, k \rangle : k \leq j\}$ vollständig enthält!

Diese syntaktische Überlegung nährt daher den Zweifel an der Rolle der Ultrapotenz in der ganzen Angelegenheit, zumindest in dem Sinne, daß es unmöglich sei, die Äquikonsistenz von **BST** ohne explizite Benutzung der Ultrapotenzen zu beweisen. Natürlich bezieht sich Robinsons Lemma vor allem auf Situationen, die gerade den Infinitesimalmathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts unterkamen und es könnte sein, daß in den höheren Bereichen der Mengenlehre, die jenen unbekannt waren, mehr dahinter steckt, als solche elementare logische Wahrheiten.

Auf jeden Fall tritt in dieser Sichtweise der „ideale“ Charakter der nonstandard Objekte deutlich in Erscheinung; ihre „Existenz“ ist eine Folge einer Unbestimmtheit im formalen Kalkül **ZFC**". In Analogie zu Hilberts Idee, die unendlichen Mengen als ideale Punkte zu deuten, die der elementaren Basistheorie hinzugefügt werden, werden hier der (ganz und gar nicht elementaren) Mengenlehre „ideale Punkte“ (nonstandard Mengen) hinzugefügt, die inhaltlich nichts verändern, aber eine expressivere Art der Beschreibung erlauben.

Ein Rollentausch zwischen „standard“ und „nonstandard“ wäre eine interessante Variante einer anders gearteten Idealisierung, in der die unendlichen Mengen als „Idealisierungen“ von endlichen aber unüberschaubaren (= nonstandard) Mengen erscheinen. Das war wohl die eigentliche Intention hinter Nelsons Buch *Radically elementary Probability Theory*, das nun auch schon fast 30 Jahre kaum beachtet in den Magazinen schlummert. Dort dient die Theorie **IST** nur als formales Vehikel, um einen formalen Beweis abzuliefern, daß die radikal endliche (nonstandard) Beschreibung der Wahrscheinlichkeitstheorie die klassischen Sätze der maßtheoretischen Wahrscheinlichkeitstheorie enthält. Diese ergeben sich ja durch rein syntaktische Umformungen aus den (nonstandard) endlichen.

LITERATUR

- [1] K. Hrbáček, Axiomatic foundations for nonstandard analysis, *Fundamenta Mathematicae* 1978, 98, pp 1 –19
- [2] K. Hrbáček, Nonstandard set theory, *Amer. Math. Monthly*, 1979, 86, pp 659 – 677
- [3] V. Kanovei und M. Reeken, *Nonstandard Analysis, Axiomatically*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004
- [4] W.A.J. Luxemburg, *Non-standard Analysis*, Lecture Notes, CalTech, Pasadena 1962
- [5] E. Nelson, Internal set theory; a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* 1977, 83, 6, pp 1165 –1198
- [6] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North Holland, Amsterdam 1966
- [7] P. Vopěnka, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979
- [8] P. Vopěnka and P. Hájek, *The theory of semisets*, North-Holland, Amsterdam, 1972
- [F] A. Fraenkel, *Einführung in die Mengenlehre*, 3. Aufl., Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1928
- [G] Kurt Gödel, *Collected Works*, Ed. S. Feferman et al., Oxford University Press 1986
- [R] *Selected Papers of Abraham Robinson*, Volume 2, Ed. W.A.J. Luxemburg, S. Körner, North-Holland, Amsterdam, 1979
- [S] Thoralf Skolem, *Selected Works in Logic*, Ed. by J.E.Fenstad, Oslo: Universitetsforlaget 1970, pp. 345 – 354
- [EDM] *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge 1987