**C'EST UNE FAÇON DE PARLER (LEIBNIZ)**

MICHAEL REEKEN

# Ein ungewohnter Blick auf das Mengenuniversum

## Zweiter Teil

## 1. Die Grundtheorie ZFC

1.1. **Einige allgemeine Bemerkungen.** In **ZFC** vereinigen sich drei grundlegende Stränge der modernen Entwicklung der Mathematik: eine mathematische Theorie des Unendlichen, die Prädikatenlogik als Kodifikation der logischen Deduktion und die Typentheorie als Abwehr gegen die Antinomien, die nach Ansicht der Zeitgenossen von Cantor auch seine (naive) Mengenlehre betrafen[1].

Die formale Sprache von ZFC hat nur zwei Relationen, die logische der Gleichheit (=) und die Relation zwischen Element und Menge, das Enthaltensein einer Menge als Element in einer anderen ($\in$). Alles was sich den syntaktischen Regeln gemäß korrekt in dieser formalen Sprache formulieren läßt, reicht aus, um weite Teile der Mathematik auszudrücken, insbesondere auch die Analysis, einschließlich ihrer jüngeren Sprösslinge wie die Funktionalanalysis und viele andere.

Ohne in der Frage Stellung zu beziehen, ob es sich bei Mengen um Objekte handelt, die – in welchem Sinne auch immer – unabhängig von uns Menschen „in der Welt" existieren, kann man wohl mit einigem Recht sagen, daß die Mengenlehre eine ungemein einleuchtende und sehr flexible, ausdrucksstarke Kodifikation eines substantiellen Teiles des mathematischen Denkens ist, worauf insbesondere die Tatsache hinweist, daß der Großteil der Mathematiker informell so argumentiert, daß eine Übersetzung in die formalisierte Sprache erstaunlich einfach ist, obwohl eine explizite Ausbildung in der Mengenlehre nicht zum Kanon der normalen Ausbildung gehört.

1.2. **Die Axiome.** Die Axiomatik ist durchweg intuitiv so einleuchtend, daß sie sich jeder sinnbetonten Betrachtung unmittelbar aufdrängt. In Hinblick auf die danach folgende Erweiterung zu **BST** sollen sie hier der Vollständigkeit halber aufgelistet werden, denn sie werden bei der Erweiterung nicht verändert.

- **Leere Menge**: es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält;
- **Extensionalität:** zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten;

[1] Eine Ansicht, gegen die man gute Gründe anführen kann. Es war eher so, daß Cantors Zeitgenossen mit seinen Argumenten, warum gewisse Vielheiten inkonsistent sind, nichts anfangen konnten.

- **Vereinigung:** alle Elemente der Elemente einer Menge $M$ zusammengenommen bilden eine Menge, die Vereinigungsmenge $\bigcup M$;
- **Paarbildung:** zu je zwei Mengen $M$ und $N$ gibt es die Menge $\{M, N\}$, die genau diese beiden als Elemente enthält;
- **Potenzmenge:** alle Untermengen einer Menge $M$ zusammengenommen bilden die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$;
- **Regularität:** jede Menge $M$ enthält ein Element $m$, das kein Element mit $M$ gemeinsam hat;
- **Unendlichkeit:** es gibt eine Menge, die abgeschlossen ist unter der Nachfolgerabbildung ($x \mapsto \bigcup\{x, \{x\}\}$) und die leere Menge enthält;
- **Separationsschema:** für jede Formel $\phi(x)$ der $\in$-Sprache mit einer freien Variablen $x$ gibt es zu jeder Menge $M$ die Untermenge $\{x \in M : \phi(x)\}$ derjenigen Elemente $x \in M$, für welche $\phi(x)$ zutrifft;
- **Ersetzungsschema:** für jede auf dem Mengenuniversum (in der $\in$-Sprache) definierte Abbildung in eben dieses bilden die Bilder aller Elemente einer beliebigen Menge zusammengenommen wieder eine Menge;
- **Auswahlaxiom:** zu jeder Menge $M$ mit nicht leeren Elementen gibt es eine Abbildung $f$, die jedem Element von $M$ eines von dessen Elementen zuordnet.

In den beiden Axiomenschemata ist von $\in$-Formeln die Rede. Das versteht sich im Kontext von ZFC eigentlich von selbst, da die Sprache (außer der Gleichheit und den logischen Symbolen) eben nur $\in$ enthält. Sobald wir jedoch ein weiteres einstelliges Prädikat hinzufügen, muß jeweils klargestellt werden, welche Formeln zulässig sind und welche nicht.

**Definition 1.1.** Formeln die st nicht enthalten, heißen *intern* und solche, in denen st vorkommt, heißen *extern.*

Diese Namen erklären sich aus der Warte von **ZFC** leicht: interne Formel ist eine, die der $\in$-Sprache angehört, extern ist sie, wenn sie durch das Auftreten von st in der Formel nicht länger der $\in$-Sprache angehört.

Robinsons außerordentliche Entdeckung hat in der später entwickelten modelltheoretischen Variante aufgezeigt, daß innerhalb der Mengenlehre Prädikate auftreten können, die in der $\in$-Sprache nicht ausgedrückt werden können, sondern nur nach einer Uminterpretation der $\in$-Relation relativ zu dieser, so daß zwei verschiedene Relationen $\in$ und $^*\in$ im nonstandard Modell koexistieren. In den sogenannten internen Theorien erscheint stattdessen das Prädikat st als in $\in$-Sprache **undefinierbarer** Bestandteil neben geeigneten Axiomen, welche die Rolle von st im logischen Kalkül fixieren.

Dies führt zu einer Vielfalt sinnhaft deutbarer neuer Prädikate und Beziehungen in den Beschreibungen, aber nicht zu neuen Objekten der Theorie. Der Unterschied läßt sich also ganz einfach auf den Punkt bringen: in der modelltheoretischen Variante werden „neue" Objekte (genauer gesagt etwas von der Art „idealer Punkte" in der Geometrie) in „alte" mathematische Strukturen eingeführt (Erweiterung), was eine Aufspaltung der $\in$-Relation nötig macht, während in den internen Theorien **IST** und **BST** keine neuen Objekte eingeführt werden, aber **neue Beschreibungen**, die zu **neuen deduktiven Prozeduren** führen. Genau das (neue deduktive Prozeduren) hat Robinson selbst als den Kern seiner Entdeckung bezeichnet.

## 2. Erweiterung zu BST

2.1. **Die Erweiterung der Axiomatik.** Zur Sprache von **ZFC** wird das „Prädikat" st hinzugefügt. Ich spreche dann von der st-$\in$-Sprache. Dieses Prädikat verhält sich im logischen Kalkül wie ein einstelliges Prädikat, ist aber von den Prädikaten von **ZFC** (welche durch Formeln der $\in$-Sprache mit einer freien Variablen repräsentiert sind) verschieden, weil es nicht dem Axiomenschema der Separation unterliegt: eine st-$\in$-Formel mit einer freien Variablen separiert aus Mengen i.a. **keine** Untermengen aus! Die **Menge** aller standard natürlichen Zahlen ist in dieser Theorie nicht vorhanden!

Man kann das auf der Ebene einer sinnvermittelnden Metasprache als die Einführung von „unscharf definierten Bereichen" auffassen. Diese sind keine Objekte der formalisierten Theorie, so wie die Extension des Prädikates „prim" in der Arithmetik kein Objekt der Theorie ist, die ja nur von Zahlen spricht. Aber in der Metasprache des Mathematikers (der sich, wenn er seinen Argumenten einen Sinn unterlegen will, ohnehin in einer die formale Sprache umfassenden, sinntragenden Metasprache ausdrückt[2]) da sind sie präsent, sie tragen einen Sinn, der nicht in der Theorie durch Objekte repräsentiert wird.

Als Axiome kommen – wie schon im ersten Teil ausgeführt – zwei Schemata und ein Axiom hinzu:

- Das Axiomenschema *Transfer:* jede $\in$-Aussage $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ hat für alle standard Werte der Parameter $a_1, \ldots, a_n$ den gleichen Wahrheitswert, wie die gleiche Aussage relativiert auf standard Mengen;
- Das Axiomenschema *Standardisierung:* zu jeder st-$\in$-Aussage $\psi(x)$ mit beliebigen Parametern und jeder Menge $M$ gibt es eine standard Menge, deren standard Elemente genau jene standard Elemente $x$ von $M$ sind, für welche $\psi(x)$ gilt;
- Das Axiom der *Finitisierbarkeit:* wenn eine Menge $\mathcal{M}$ von endlichen Teilmengen einer Menge $M$ alle standard endlichen Teilmengen von $M$ enthält, dann enthält sie eine endliche Untermenge von $M$, die alle standard Elemente von $M$ enthält.

Das Axiom der Finitisierbarkeit sieht etwas anders aus als im ersten Teil. Dieses hier formulierte Axiom ist stärker. Ich habe im ersten Teil aus Gründen der Übersichtlichkeit eine schwache Version gewählt, die schon ausreichte um das dort betrachtete Problem zu lösen. Das jetzt stärker formulierte Axiom ist tatsächlich stark genug, um die anders aussehenden Formen zu beweisen, die in [3] für **BST** angegeben sind.

2.2. **Der Sinn dieser Axiomatik.** Die folgenden Erörterungen sind weder „rein mathematischer" noch „formal logischer" Natur. Es geht um eine **sinnhafte Interpretation** der Axiome in einer die formale Sprache umfassenden Metasprache, aber **nicht** um eine **Formalisierung** dieses Sinnes in einer noch umfassenderen Metasprache. Von Bedeutung ist nur, daß der gewählte Sinn mit den Ergebnissen der formalen Theorie überzeugend korrespondiert und die formale Theorie relativ konsistent zur Ausgangstheorie (jener ohne „ideale Punkte") ist.

[2] Auch die gegebene Beschreibung der Axiome gehört offensichtlich einer Metasprache an, die eigentlichen Axiome sind Schemata von Formeln der formalen Sprache und einzelne Formeln derselben.

Diese Suche nach Sinn ist weder mathematisch noch logisch motiviert. Sie beruht auf der Erkenntnis, daß historisch alle Mathematik aus sinnbehafteten Überlegungen entstanden ist[3] und daß das mathematische Denken nicht analog zum Funktionieren eines Computers zu denken ist, sondern gerade die Ambivalenzen, die immer wieder auftretenden Paradoxien, die Unklarheiten, ja die Fehleranfälligkeit sinnhaften Denkens die Weiterentwicklung der Mathematik ermöglichen. Man lernt nur aus Fehlern und Irrwege führen häufig zu unerwarteten, wichtigen Entdeckungen.

Der Sinn der Axiome von **ZFC** erschließt sich, wie gesagt, sehr leicht. Ich habe sie weitgehend ohne Verwendung von Formeln in natürlicher Sprache aufgelistet. Die Sinnhaftigkeit erhöht sich weiter, wenn man die hierarchische Struktur des Mengenuniversums (von-Neumann-Hierarchie) ins Auge faßt, eine Hierarchie, die einen iterativen Aufbau des Mengenuniversums erkennbar macht.

Es geht also jetzt nur noch um den Sinn der zusätzlichen Axiome, die im vorangehenden Unterabschnitt aufgeführt worden sind. Diese Axiome beschreiben, wie sich das Prädikat st in den Kontext der Mengenlehre einfügt. Dabei wollen wir versuchen aus den Axiomen einen Sinn zu rekonstruieren, der den Sinn der in $\in$-Sprache ausgedrückten Aussagen nicht verändert.

Eingerückte Textpassagen werden jeweils ein formal bewiesenes Resultat in dem anzugebenden Sinnzusammenhang diskutieren.

2.2.1. *Bestimmte und unbestimmte Mengen.* Eine Menge heißt $\in$-definierbar, wenn es eine parameterfreie Formel $\phi(x)$ der $\in$-Sprache gibt, so daß die Aussage $\exists_1 x\, \phi(x)$[4] gilt. Man kann dann die $\in$-Sprache um ein Symbol, z.B. $a$, erweitern, wobei $a$ ein Name für diese Menge sein soll. Dann muß man den Axiomen noch ein weiteres hinzufügen, nämlich $\phi(a)$, damit in der Theorie manifest wird, daß $a$ der Name eben jener einzigen Menge ist, die $\phi(x)$ erfüllt.

Wenn nun $a$ der Name einer $\in$-definierbaren Menge ist, dann kann man auch im Falle einer Formel $\psi(x, a)$, welche außer $a$ keine weiteren Parameter enthält und für welche $\exists_1 x\, \psi(x, a)$ gilt, einen neuen Namen $b$ dafür einführen und dieses $b$ als $\in$-definierbar betrachten, denn man kann das $b$ auch parameterfrei definieren: $\exists_1 \langle x, y\rangle\ (\phi(y) \wedge \psi(x, y))$. Die Einschränkung auf parameterfreie $\in$-Formeln umfaßt daher auch Definitionen mittels schon $\in$-definierter Parameter.

Ich werde den Ausdruck „bestimmt" für $\in$-definierbar verwenden. Mengen, die keine $\in$-Definition besitzen, heißen dann „unbestimmt". Bestimmtheit hängt von den Axiomen ab. Bei Erweiterung des Axiomensystems von **ZFC** werden neue Mengen $\in$-Definitionen besitzen. Es ist bedeutsam, sich klar zu machen, daß „die meisten" Mengen unbestimmt sind. Die formale Sprache von **ZFC** wird informell interpretiert als ein Sprechen über Mengen. Es wird also in der Mathematik über unbestimmte Objekte pauschal gesprochen, aber eine ontologiche Bedeutung geht diesen Objekten ab. Sie sorgen lediglich dafür, daß die logischen Regeln bezüglich der Quantoren „für alle" und „es gibt" erfüllt sind. Die bestimmten Objekte hingegen sind das Substrat der Mathematik. Bestimmtheit hängt mit dem Prädikat „standard" zusammen.

**Theorem 2.1.** *Jede $\in$-definierbare Menge ist standard.*

---

[3]Das gilt auch und gerade für die Mengenlehre, die vor ihrer Axiomatisierung und Formalisierung von Cantor, Hausdorff und anderen informell und sinnbetont sehr weit entwickelt worden war.

[4]$\exists_1$ steht für „es gibt genau ein ...", oft auch durch $\exists!$ bezeichnet.

*Beweis.* Die Aussage $\exists_1 x\, \phi(x)$ sei also wahr für eine $\in$-Formel $\phi$. Nach Transfer gilt $\exists_1^{\mathrm{st}} x\, \phi^{\mathrm{st}}(x)$. Also gibt es eine bestimmte Menge, welche $\phi^{\mathrm{st}}(x)$ erfüllt. Sei $a$ der Name dieser standard Menge. Also gilt $\phi^{\mathrm{st}}(a)$. Nach Transfer gilt dann auch $\phi(a)$, also ist $a$ die eindeutige Menge, die $\phi(x)$ erfüllt, und $a$ ist standard. □

Über die nonstandard Objekte kann also gesprochen werden, aber sie sind nur Argumentationshilfen oder Metaphern für komplizierte Zusammenhänge[5]. Nonstandard Mengen sind wie die „idealen Punkte" in der Geometrie.

Der umgekehrte Schluß ist aber falsch: auch unter den standard Objekten gibt es $\in$-undefinierbare. Sie treten, wie in $\in$-Sprache auch in der Form „$x$ ist Elemente von $a$" auf. Selbst wenn $a$ $\in$-definierbar ist, sind nicht notwendigerweise alle standard Elemente von $a$ auch $\in$-definierbar.

Die Mengenlehre ist als der umfassendste formale Rahmen für den intuitiven Mengenbegriff gefaßt, der alle bekannten Paradoxien vermeidet. In diesem Sinne erscheint st als eine **Einschränkung** dieses Rahmens (solange nicht gilt: „alles ist standard"!), aber deutet auf etwas wie ein in $\in$-Sprache undefinierbares inneres Modell hin, das alle $\in$-definierbaren Mengen bereits enthält. Das wird durch Transfer ausgedrückt.

> Da Bestimmtheit ($\in$-Definiertheit) stärker ist als „standard" zu sein, bietet sich als mögliche Deutung für „standard" auch an: „potenziell bestimmt". Die Unbestimmtheit der meisten Mengen in ZFC ist ja keine absolute Eigenschaft, sondern eine, die sich mit zukünftigen Erweiterungen (wie sie Gödel als notwendig erachtet hat) ändern wird. Da die Erweiterung unspezifiziert bleibt, bedeutet dies, daß „standard" universell ist und unter allen relativ konsistenten Erweiterungen weiter bestehen wird.

2.2.2. *Die natürlichen Zahlen.* Es empfiehlt sich, zunächst den untersten Abschnitt der v.-Neumann-Hierarchie zu untersuchen. Wie üblich bezeichnet $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ die Menge der natürlichen Zahlen mit den beiden Elementen 0 und 1, den beiden Operationen Addition und Multiplikation und der Ordnungsrelation. Wenn man $\mathbb{N}$ mit $\omega$ identifiziert, besitzen alle diese Elemente, Operationen und die Relation einfache $\in$-Definitionen. Wenn gewünscht kann man natürlich auch ein beliebiges isomorphes Bild davon als Inkarnation dieser Struktur nehmen. Ein Beispiel ist im ersten Teil gegeben worden. Die Struktur ist also eigentlich eine Isomorphieklasse, von der man sich den Repräsentanten aussucht, den man bevorzugt.

In einer sinngebundenen Interpretation (die $\in$ fixiert) gibt es außer dieser Klasse nichts weiter. Nur wenn man den Sinn von $\in$ aufgibt und diese Relation als Symbol betrachtet, das nur formaler Bestimmung unterliegt, kann man durch Uminterpretation des $\in$ auch sogenannte nonstandard Modelle der Struktur erzeugen, die aber nicht mehr eindeutig bestimmt sind. Das ist aus formalistischer Sicht nicht zu beanstanden, aber eine Sinndeutung wird schwierig, wenn man eine ontologische Deutung sucht.

[5] Es gilt noch viel mehr: **BST** beweist, daß jede st-$\in$-definierbare Menge notwendigerweise ebenfalls standard ist. Daraus folgt, daß über nonstandard Objekte nur im Plural gesprochen werden kann. Man kann natürlich Namen für solche Objekte einführen, aber auf die trifft Kroneckers Verdikt zu, daß es nur Gerede ist, was aber dem Nutzen dieses Geredes keinen Abbruch tut – eine Einsicht, die in Form von „idealen Punkten" auch Kronecker eingeleuchtet haben muß.

Bevor wir uns einer Sinndeutung von st zuwenden, noch einige unmittelbare Ergebnisse der formalen Theorie **BST**.

**Theorem 2.2.** *Der Nachfolger einer standard natürlichen Zahl ist standard.*

*Beweis.* Die leere Menge ist standard. Die Nachfolgeroperation ist parameterfrei $\in$-definiert. Zu jeder endlichen Ordinalzahl gibt es eine eine endliche Ordinalzahl, den Nachfolger. Aus Transfer folgt daraus, daß es zu jeder standard endlichen Ordinalzahl eine standard endliche Ordinalzahl als Nachfolger gibt. $\square$

Wir wollen jetzt die gerade bewiesene Aussage genauer betrachten: für jedes $x \in \mathbb{N}$ impliziert $\mathrm{st}(x)$, daß $\mathrm{st}(x{+}1)$. Die Aussage $\mathrm{st}(x) \Rightarrow \mathrm{st}(x{+}1)$ ist aber äquivalent zu $\neg\mathrm{st}(x{+}1) \Rightarrow \neg\mathrm{st}(x)$ (Kontraposition). Daher ist die ursprünglich bewiesene Aussage aus logischen Gründen gleichbedeutend zu: für jede natürliche Zahl $x+1$ impliziert $\neg\mathrm{st}(x+1)$, daß $\neg\mathrm{st}(x)$. Oder stromlinienförmiger ausgedrückt: jeder nonstandard Nachfolger hat einen nonstandard Vorgänger. An dieser Aussage ist nichts mysteriös oder paradox. Insbesondere ist ja völlig ungeklärt, ob es überhaupt nonstandard Zahlen gibt. Dieser Frage wenden wir uns jetzt zu.

**Theorem 2.3.** *Es gibt nonstandard Zahlen.*

*Beweis.* Nach Finitisierbarkeit gibt es eine endliche Untermenge von $\mathbb{N}$, welche alle standard Elemente enthält. Diese hat ein maximales Element (Theorem von **ZFC**), das notwendigerweise nonstandard ist, denn unterhalb davon liegen alle standard Elemente und die enthalten wegen 2.2 kein maximales Element. $\square$

Jetzt allerdings kommen Zweifel auf. Wir kennen standard Zahlen: 0 ist standard und alle Nachfolger sind standard. Wir wissen auch, daß es nonstandard Zahlen „gibt". Der formale Beweis lieferte die Formel $\exists x \in \mathbb{N}\, \neg\mathrm{st}(x)$. Wir wissen aber schon, daß diese „existierenden" $x$ nicht bestimmt sein können, denn da wären sie standard. Das nährt Zweifel und das 19. Jahrhundert hätte hier wieder kategorisch die hoffnungslose Korruption dieses Denkens angeprangert. Die Zweifel fallen jedoch in sich zusammen, wenn wir erkennen, daß es so etwas wie die **Menge der standard** bzw. die **Menge der nonstandard Zahlen** nicht gibt.

**Theorem 2.4.** *Die standard (bzw. die nonstandard) natürlichen Zahlen bilden keine Menge.*

*Beweis.* Angenommen die standard natürlichen Zahlen bilden eine Menge, dann auch das Komplement. Dieses ist, wie eben gezeigt, nicht leer und enthält daher ein kleinstes Element, dessen Vorgänger standard sein müßte, weshalb das kleinste Element als Nachfolger des standard Vorgängers auch standard wäre. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\{x \in \mathbb{N} : \mathrm{st}(x)\}$ keine Menge sein kann. $\square$

> Die natürlichen Zahlen zerfallen also in zwei „unscharfe Bereiche" (suggestiver Ausdruck für „nicht-extensional", „nicht durch eine Menge beschreibbar", „nicht scharf getrennt", was die Geltung des Prinzips vom kleinsten Element verhindert). Die „Unschärfe" ist aber nicht von der Art, daß die Zugehörigkeit zu den Bereichen einer mehrwertigen Logik unterliegt. Die logische Dichotomie bleibt aufrecht: ein Element ist standard oder nicht und etwas anderes kommt nicht vor. Das geht gerade deswegen, weil wir diesen Bereichen den Mengenstatus verweigern[6].

---

6

Sinnhaft greifbar machen kann man den Gegensatz zwischen standard und nichtstandard ganz einfach! Dazu verwenden wir das vorangehende Ergebis. Wir argumentieren in $\omega$. 0 ist standard und der Nachfolger einer standard Zahl ist standard. Sagen wir stattdessen die Zahl sei *realisiert.* Jede in einem vollständig dokumentierten Anfangsabschnitt auftretende Zahl ist realisiert. Wenn das Ende des Abschnitts $n$ ist, dann genügt es $n+1$ anzufügen um $n+1$ als realisiert zu begreifen. Das heißt die Grenze ist gar nicht fixiert, sondern läuft. Jeder Versuch die Grenze ins Auge zu fassen führt zur Verlagerung der Grenze nach oben. Dennoch gibt es oberhalb immer weitere Zahlen, weil dieser Gedankengang die **potenzielle** Unendlichkeit des Zählens im Auge hat. Wir blicken also auf $\omega$ als eine potenziell unendliche Menge, deren Horizont offen ist, so daß jenseits jeder erreichten Grenze noch weitere Elemente dieser Art auftauchen werden.

Im Gegensatz dazu steht die aktual unendliche Menge $\omega$, wie sie in **ZFC** formalisiert ist. Da wird die Gesamtheit dieser potenziell unendlichen Folge als ein fertiges Ganzes postuliert. Innerhalb dieser aktual unendlichen Menge liegt aber unverändert die potenzielle Unendlichkeit der individuell aufgezählten Zahlen. Kein noch so großer endlicher Anfangsabschnitt kann die aktual unendliche Menge ausschöpfen, aber keine der noch nicht in einem Anfangsabschnitt enthaltenen Zahlen, bleibt für immer außerhalb der wachsenden Anfangsabschnitte. Auf diese Weise erscheint eine Differenzierung, die sich in der $\in$-Sprache gar nicht beschreiben läßt. Das ist die Bedeutung von „nichtstandard": jenseits aller endlichen Anfangsabschnitte zu liegen. In der Ära des Infinitesimalkalküls waren das die „unendlichen" Zahlen, Begriffe, die vor der Entwicklung der mathematischen Logik jedoch nicht als unbedenklich begriffen werden konnten.

Die Frage, die sich einer solchen Interpretation stellt, ist einfach die, ob es mit der Mengenlehre verträglich ist, daß die potenzielle Unendlichkeit der „realisierten" Zahlen innerhalb der aktual unendlichen Menge der natürlichen Zahlen sich erkennbar und argumentativ konsistent als echter Unterbereich einfügen läßt, oder ob nicht einfach zwangsläufig folgt, daß alle Zahlen der unendlichen Menge als „realisiert" gelten müssen, oder, schlimmer noch, Widersprüche unvermeidbar werden. Diese Antwort ist in orthodoxer (formalistischer) Weise beantwortet: es geht. Im dritten Teil werde ich dieser Frage aus einer rein syntaktischen Perspektive nachgehen.

Wer mit Physikern verkehrt wird bemerken, daß das beschriebene Argument auf diese durchaus ansprechend wirkt, da sie häufig solche „qualitativen" Argumente verwenden. Die ganze Tätigkeit

Es wäre einfach diese Objekte in der formalen Theorie als neuen Typ von Objekt zu repräsentieren, bei Vopěnka ist das in einer geeignet axiomatisierten Klassentheorie schon 1972 in einem anderem Kontext vorexerziert worden. Ebensogut könnte man ohne Einbettung in eine Klassentheorie einfach einen neuen Typ Variable mit einem geeigneten Separationsaxiom hinzufügen.

des Physikers kann man als ein Pendeln zwischen einem oft sehr weit her geholten qualitativen Sinn und (mehr oder weniger) formaler Rechnung begreifen. Die Physiker waren auch bei den Letzten, die noch an den Infinitesimalen hingen.

Transfer ist in diesem Zusammenhang auch plausibel: alles was über die Menge der natürlichen Zahlen in mengentheoretischer Sprache gesagt werden kann, sollte auch auf die Gesamtheit der „realisierten" zutreffen, weil wir erwarten, daß der geschilderte Unterschied zwischen der Menge und dieser nur anders aufgefaßten Gesamtheit nichts daran ändert, daß wir die gleichen Objekte vor uns haben, aber das eine Mal behandeln wir die Zahlengesamtheit als aktual unendlich, das andere mal fassen wir ihren Entstehungsprozeß, also die potenzielle Unendlichkeit ins Auge. Wegen des Extensionalitätsaxiomes können wir diesen Unterschied in dem Begriff der Menge gar nicht unterbringen, deswegen die Notwendigkeit, diesem potenziell unendlichen Objekt den Mengenstatus vorzuenthalten.

Der zu erwartende Einwand, diese „Argumente" seien unklar, spekulativ und auf jeden Fall „mathematisch sinnlos", geht völlig ins Leere, denn diese „Argumente" erheben gar keinen Anspruch, auf dem Niveau der Metasprache formalisierbar und ein **Beweis** für die relative Konsistenz dieser Vorstellung zu sein. Es soll nur etwas plausibel machen, das in Form der formalen Systeme von **IST** und dem Untersystem **BST** bereits als relativ konsistent erkannt ist und zu genau diesen Konsequenzen führt.

2.2.3. *Was heißt Erweiterung?* Die von der modelltheoretischen Sichtweise nahegelegte Interpretation, daß wir „neue Mengen" zu dem Mengenuniversum hinzufügen, ist als Erläuterung eines **Sinnes** schlicht **unsinnig**: das Universum **aller** Mengen enthält **alle** Mengen. „Weitere Mengen" können nicht mehr alle Axiome von **ZFC** erfüllen.

Tatsächlich ist klar, daß $\omega$ seinen Status als kleinste unter Nachfolger abgeschlossene und 0 enthaltende Menge verliert, wenn die Gesamtheit der standard natürlichen Zahlen zur Menge deklariert wird. Schlimmer noch wird $\omega$ dann zur **nicht** wohlfundierten Menge, weil es unendliche absteigende $\in$-Ketten darin gibt. Denn die formale Theorie beweist ja, daß es nonstandard Zahlen gibt und daß der Vorgänger eines nonstandard Nachfolgers nonstandard ist. Wenn wir die Zahlen in $\omega$ interpretieren, dann gilt doch $n \in n + 1$. Außerdem hat dann die Menge der nonstandard natürlichen Zahlen kein kleinstes Element mehr. Um dies Unglück zu vermeiden, muß man eben in der Modelltheorie die $\in$-Relation für das nonstandard Modell uminterpretieren, weil die (durch die Axiome von **ZFC** fixierte) Relation $\in$ gar keine solchen Mengen zuläßt.

Wenn man also dem nonstandard Modell als mengentheoretischer Konstruktion über einem mengentheoretisch definierten „standard Modell" einen Sinn zuordnen soll, dann doch offenbar den, daß die Mengenlehre außerstande ist, ohne Uminterpretation der grundlegenden $\in$-Relation und verkappter Einführung von nicht wohlfundierten Mengen, das Phänomen, hinter dem wir her sind, sichtbar zu machen. Also muß entweder eine Umgestaltung der Mengenlehre her, in der nicht wohlfundierte Mengen auftreten (externe axiomatische Theorien) oder man fügt in den internen Theorien ein nicht-extensionales Sprachelement hinzu und beides funktioniert bewiesenermaßen.

Damit sind dann auch die peinlichen ontologischen Fragen in einer sinnbehafteten Interpretation gelöst: diese nonstandard (d.h. idealen) Elemente sind in $\omega$ – wie in der geschilderten sinnhaften Deutung – lediglich Idealisierungen großer Zahlen, die von dem unbeschränkt wachsenden Abschnitt der standard (d.h. konkreten, nicht „idealisierten") Zahlen ins „Unendliche" verdrängt werden, aber immer noch erlauben, sinnvolle Aussagen über die standard Zahlen zu machen, die man in der $\in$-Sprache oft nur sehr mühsam formulieren kann. Es ist also ein Effekt, wie er aus anderen mathematischen Kontexten bekannt ist, wenn man „ideale Punkte" einführt. Die nonstandard Mengen sind in den internen Theorien schlicht ideale Mengen in einer sonst ungeänderten Mengenlehre[7]. Im Gegensatz zu den zahlreichen unbestimmten Mengen in **ZFC** sind sie jedoch „prinzipiell unbestimmt"; keine relativ konsistente Erweiterung von **ZFC** wird sie jemals bestimmen können! Es handelt sich um ideale Punkte, *une façon de parler.*

Aber wie die *unendlich fernen Punkte* in der Geometrie, die als Schnitt zweier paralleler Geraden im Sinne des Bishop Berkeley die *„ghosts"* sind, die zurückbleiben, wenn zwei fast parallele Gerade sich in einem Punkt schneiden, der bei weiterer Annäherung an die Parallelität im Unendlichen verschwindet (*departed quantity*), so haben auch die idealen Mengen wirkliche Mengen als Anknüpfungspunkte: die Mengen, die jenseits des Horizontes eines schon etablierten Anfangsabschnittes der endlichen Ordinalzahlen antizipiert werden. Wenn diese Anfangsabschnitte zu $\omega$ vereinigt werden, bleibt nichts davon zurück, die nonstandard Objekte sind in diesem Bild „Geister verstorbener Größen". Und es ist eine Eigenheit der Logik erster Stufe, diese Geister im Kalkül als Scheinobjekte zu tolerieren, ohne inkonsistent zu werden.

Die Zumutung, an „unendliche Zahlen" in dem gleichen Sinne „zu glauben" wie an die Zahlen 1,2,3,... ist damit vom Tisch. Das Ganze ist ein Effekt der Prädikatenlogik erster Stufe auf unendlichen Bereichen und die extensionale Mengenlehre kann diesen nicht-extensionalen Effekt mittels der Ultrapotenzmethode lokal rekonstruieren und damit seine logische Unbedenklichkeit nachweisen.

Die eigentliche Frage ist, ob man nicht versuchen sollte, diese Scheinobjekte in die Theorie unmittelbar hineinzubauen und eine **einheitliche** $\in$-Relation für alles zu bekommen. Das wird im dritten Teil u. a. diskutiert werden.

2.2.4. *Standardisierung.* Man kann das Axiom der Standardisierung auch folgendermaßen formulieren: für jedes externe Prädikat $\psi(x)$ mit beliebigen Parametern und für jede Menge $M$ gibt es genau eine standard Menge $S$, so daß deren standard Elemente genau die Elemente sind, die $\psi(x) \wedge (x \in M \wedge \mathrm{st}(x))$ erfüllen.

Die durch Standardisierung definierte Menge wird auch durch ${}^{\mathrm{s}}\{x \in M : \psi(x)\}$ bezeichnet. Die Schreibweise $\{x \in M : \psi(x)\}$ bezeichnet i.a. keine Menge! Man kann das (in der Metasprache) als einen durch die Formel $\psi$ aus $M$ separierten unscharfen Bereich verstehen.

[7]Dennoch unterscheiden die beiden Theorien sich deutlich im Ausmaß der „Idealisierung". In IST wird die „Idealisierung" so weit getrieben, daß das Mengenuniversum in einem bestimmten Sinne in einer „endlichen" Menge Platz findet. Vielleicht war das von Nelson als Provokation der „Gläubigen" der „Heiligen Kirche der Mathematik" gedacht. **BST** gibt sich da wesentlich bescheidener und zeichnet sich deswegen metamathematisch in besonderer Weise aus. Das wird im dritten Teil ausgeführt werden.

Wir wollen das als Definition in der Metasprache so formulieren: ein *unscharfer Bereich* ist die durch eine Menge $M$ und eine st-$\in$-Formel $\phi(x)$ definierte logische Extension des Prädikates $x \in M \wedge \phi(x)$, die mit keiner der Untermengen von $M$ extensional übereinstimmt[8].

Standardisierung impliziert insbesondere, daß jede Menge $M$ eine Standardisierung besitzt: ${}^{\mathrm{s}}M = {}^{\mathrm{s}}\{x \in M : \mathrm{st}(x)\}$. Für den unscharfen Bereich $\{x \in M : \mathrm{st}(x)\}$ werden wir auch kurz $M_\sigma$ schreiben und als *standard Kern* von $M$ bezeichnen. Alle Mengen stehen in dieser Weise in Beziehung zu standard Mengen[9].

**Theorem 2.5.** *Jede standard Menge $M$ ist durch ihren standard Kern $M_\sigma$ vollständig bestimmt.*

*Beweis.* Gemäß Extensionalität sind zwei Mengen gleich, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten. Nach Transfer sind dann zwei standard Mengen genau dann gleich, wenn sie die gleichen standard Elemente enthalten. □

**Beispiel 1.** *Wir nehmen anstelle von $M$ die Menge $\mathbb{N}$ und die Formel $\psi(x) :\equiv \neg\mathrm{st}(x)$. Dann ist die Standardisierung ${}^{\mathrm{s}}\{x \in \mathbb{N} : \neg\mathrm{st}(x)\}$ die leere Menge, denn es gibt kein standard Element, das die Formel erfüllt.*

> Das paßt zu dem beschriebenen Sinn. Standardisierung stellt eine Beziehung solcher unscharfer Bereiche, hier der „außerordentlich großen" Zahlen zu einer standard Menge her. Der Schluß drängt sich auf, daß diese Zahlen nur zur leeren Menge in Beziehung stehen können, weil sie ins „Unendliche" verdrängt werden, für das es in der kleinsten unter Nachfolger abgeschlossenen Menge, die 0 enthält, einfach keinen Platz gibt. Das was in der sinnhaften Deutung von „standard" am postulierten „Ende" des iterativen Erzeugungsprozesses die Zahlen sind, das sind beweisbar alle jene, die der iterative Prozeß hervorbringt. Die nonstandard Punkte sind „ideale Mengen", die nur als Symbole in der formalen Sprache auftauchen, aber Träger eines lebendigen Sinnes sind. Die Verwerfung dieses Sinnes als kontradiktorisch war verfrüht, man hatte einfach noch nicht das nötige Verständnis der Prädikatenlogik erster Stufe und der damit verknüpften Formalisierung. Wie zu erwarten hält sich aber das gar nicht hinterfragte Vorurteil noch lange Zeit zäh und dogmatisch.

**Beispiel 2.** *Diesmal nehmen wir die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und die Formel $\psi(x) :\equiv \forall^{\mathrm{st}} y > 0 \; |x| < y$. Dann erhalten wir folgende Standardisierung innerhalb von $\mathbb{Q}$: ${}^{\mathrm{s}}\{x \in \mathbb{Q} : \forall^{\mathrm{st}} y > 0 \; |x| < y\}$. Da jede standard Zahl außer 0 einen standard positiven Abstand von 0 hat, ist das einzige standard Element die 0, also gilt*

$$ {}^{\mathrm{s}}\left\{x \in \mathbb{Q} : \forall^{\mathrm{st}} y > 0 \; |x| < y\right\} = \{0\}\,. $$

> In der herkömmlichen Mathematik ist die einzige Infinitesimale die 0. Man sieht, wie Standardisierung die unscharfen Bereiche radikal

[8] In [8] erscheinen solche Objekte in einer formalisierten Klassentheorie als eigene, von den Mengen verschiedene Objekte, die *semi-sets* heißen. Dabei geht es dort gar nicht um Nonstandard Analysis, obwohl auf den Zusammenhang im Vorübergehen hingewiesen wird.

[9] Das ist in **IST** nicht der Fall und ist eine der Ursachen für die Unterschiede zwischen **IST** und **BST**.

> zusammenstreicht auf das was von solchen unscharfen Begriffsbildungen in der extensionalen Mengenlehre übrig bleibt. Die „Erweiterung" durch das st besteht nur darin, daß ein neuer Aspekt eingeführt wird, der jederzeit wieder „abgeschaltet" werden kann. Von Nelson stammt der schöne Vergleich: das sei wie der Unterschied zwischen einem Schwarzweißfernseher und einem mit Farbe; das Bild ist das gleiche, aber farbig.

2.2.5. *Vollständige Induktion.* Induktion ist ein Theorem von **ZFC**. Es lautet so:

**Proposition.** *Es sei $M$ eine Menge von natürlichen Zahlen, die $0$ enthält und mit jeder Zahl $x$ auch $x+1$, dann ist $M$ die Menge aller natürlichen Zahlen.*

Daneben tritt nun noch die externe Induktion:

**Theorem 2.6.** *(Externe Induktion) Es sei $\phi(x)$ eine beliebige Formel mit beliebigen Parametern. Wenn $\phi(0)$ gilt und für jede standard natürliche Zahl $x$ immer $\phi(x) \Rightarrow \phi(x+1)$ gilt, dann gilt $\phi(x)$ für alle standard natürlichen Zahlen.*

*Beweis.* Es sei $N := {}^{\mathrm{s}}\{x \in \mathbb{N} : \phi(x)\}$. Offensichtlich gilt $0 \in N$, denn $0$ ist ein standard Element von $\mathbb{N}$ und erfüllt die Formel. Außerdem gilt $x \in N \Rightarrow (x+1) \in N$ für alle standard $x$. Nach Transfer und weil $N$ standard Parameter in der Formel ist, gilt das sogar für alle $x$, also ist nach gewöhnlicher Induktion $N = \mathbb{N}$. Für die standard $x \in N$ gilt aber nach Definition $\phi(x)$ und wegen $N = \mathbb{N}$ sind das alle standard $x$ aus $\mathbb{N}$. □

Man kann in der Metasprache das auch korrekt so formulieren: wenn ein durch $\phi$ definierter, unscharfer Bereich in $\mathbb{N}$ die $0$ und mit jedem standard $n$ auch $n+1$ enthält, dann umfaßt er $\mathbb{N}_\sigma$.

Es soll auch hier wieder angemerkt werden, daß in den Beweis das Axiom der Finitisierbarkeit nicht eingeht!

> Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem beschriebenen Sinn: auf dem Bereich aller Zahlen gilt stets Induktion für $\in$-Formeln, aber auf dem Bereich der standard Zahlen gilt sie für beliebige Formeln, weil Induktion auf unter Nachfolger abgeschlossenen Bereichen (welcher Art auch immer) uns vom sinnhaften Verständnis her unausweichlich erscheint.

2.2.6. *standard und endlich.* Zwischen den Prädikaten „endlich" und „standard" besteht eine wichtige Beziehung:

**Theorem 2.7.** *Eine Menge $M$ ist standard und endlich genau dann, wenn sie aus einer standard Anzahl von standard Elementen besteht.*

*Beweis.* (i) Sei $M$ standard und endlich. Endlich heißt, es gibt eine Bijektion $b : n \to M$, wo $n$ eine natürliche Zahl ist. Transfer ergibt, daß es eine standard Bijektion gibt, die eine standard natürliche Zahl auf $M$ abbildet. Die Bilder von standard Elementen unter einer standard Bijektion sind standard.

(ii) Es sei $M$ eine Menge, die eine standard Anzahl $n$ von Elementen hat und nur standard Elemente. Wenn $n = 0$, dann handelt es sich bei $M$ um die leere Menge und die ist standard. Angenommen, die Behauptung ist schon bewiesen für ein beliebiges standard $n > 0$. Dann sei $M$ eine Menge mit $n+1$ Elementen und $m \in M$. Nach Voraussetzung ist $m$ standard. Die Menge $M \setminus \{m\}$ hat $n$ Elemente und besteht nur aus standard Elementen und ist daher eine standard Menge nach Induktionsannahme. Das gleiche gilt für die Menge $\{m\}$. Aber $M = (M \setminus \{m\}) \cup \{m\}$ ist als Vereinigung zweier standard Mengen wieder standard. Die Voraussetzungen der externen Induktion sind gegeben, also gilt die Behauptung für alle standard $n$. $\square$

Das bedeutet, daß die hereditär endlichen standard Mengen auch hereditär standard sind, d.h. alle Elemente sind standard und all deren Elemente auch und so fort. Auch in dem letztgenannten Theorem spielt Finitisierbarkeit keine Rolle!

> Um die Sinndeutung auf Zahlenmengen zu testen müssen wir erst erklären, was wir unter einer endlichen, realisierten Menge von natürlichen Zahlen verstehen wollen. Da drängt sich folgende Definition geradezu unausweichlich auf: eine Menge natürlicher Zahlen ist endlich und realisiert, wenn sie nur aus realisierten Zahlen besteht und ihre Anzahl realisiert ist. Jede andere Definition würde absonderlich wirken: warum soll eine Menge realisiert heißen, wenn entweder ihre Anzahl unrealisiert ist oder wenn sie unrealisierte Elemente enthält?
>
> Alternativ können wir auch „potenziell bestimmt" nehmen. Eine potenziell bestimmte Menge besteht aus einer potenziell bestimmbaren Anzahl von potenziell bestimmbaren Mengen. Alles andere würde dem assoziierten Sinn widersprechen.
>
> Das ist aber gerade die Schlußfolgerung in der formalen Theorie. Hier eilt der Sinn dem Beweis voraus. Ein in der Axiomatik nicht unbekannter Effekt, daß unmittelbar einsichtige sinnhafte Aussagen formal aus nicht unmittelbar einsichtigen Axiomen folgen.

2.2.7. *Finitisierbarkeit.* Aus Finitisierbarkeit folgt unmittelbar die schwache Version, die im ersten Teil aufgeführt worden ist:

**Lemma 2.8.** *Jede Menge $M$ besitzt eine endliche Untermenge $N$, die alle standard Elemente der Menge $M$ enthält.*

*Beweis.* Die Menge $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ aller endlichen Teilmengen enthält alle standard endlichen Teilmengen von $M$, also enthält sie eine endliche Menge $N \subseteq M$, die alle standard Elemente von $M$ enthält. $\square$

**Definition 2.9.** Wir bezeichnen eine endliche Teilmenge $N \subseteq M$ als eine für $M$ *ausreichende* Menge, wenn sie alle standard Elemente von $M$ enthält.

> Hier bekommen wir mit dem bisher für natürliche Zahlen ins Auge gefaßten Sinn Probleme, da hier von beliebigen unendlichen Mengen die Rede ist. Aber wir können „realisiert" in einem nicht präzisierten Sinn verstehen: irgendein innerhalb der Mengenlehre „konstruktives" Verfahren um systematisch mathematische Objekte zu definieren. Das Theorem 2.1 macht das deutlich: die Mengen, welche die Mengenlehre selbst eindeutig bestimmen kann, sind alle „realisiert".
>
> Mit dieser Vorstellung macht die Aussage des Finitisierbarkeitsaxiomes Sinn: alles was in einer realisierten Menge an realisierten Elementen vorliegt, soll in einer unrealisierten aber endlichen Menge liegen. Das Beispiel aus dem ersten Teil zeigt, welcher Art der

> Nutzen ist, den man daraus zieht: wenn in jeder endlichen Menge eine allgemeine Definition eines Objektes einen Zeugen hat, dann gibt es eine „ideale" endliche Menge, die häufig Zeuge eines abstrakten (kompliziert definierten) Objektes ist.

2.2.8. *Existenz von Funktionen.* Mathematische Überlegungen drehen sich auch stets um Funktionen. Obwohl diese in der Mengenlehre als Mengen erscheinen, lohnt es sich Funktionen explizit zu behandeln.

Es sei $\phi(x, y)$ eine Relation. Eine Funktion $f : X \to Y$ *erfüllt* die Relation $\phi$, wenn für alle $x \in X$ die Relation $\phi(x, f(x))$ erfüllt ist. Das Auswahlaxiom von ZFC garantiert (für Relationen in der $\in$-Sprache), daß es solche Funktionen gibt, wenn man weiß, daß zu jedem $x \in X$ eine $y \in Y$ existiert, für welche $\phi(x, y)$ erfüllt ist. Das entsprechende Theorem lautet:

**Proposition.** *Für eine beliebige $\in$-Relation $\phi(x, y)$ mit beliebigen Parametern gilt: wenn es zu jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ gibt, so daß $\phi(x, y)$ gilt, dann gibt es eine Funktion $f : X \to Y$, so daß für alle $x \in X$ gilt, daß $\phi(x, f(x))$.*

Dazu gibt es in **BST** ein entsprechendes Theorem für beliebige st-$\in$-Formeln:

**Theorem 2.10.** *Für eine beliebige* st-$\in$*-Relation $\phi(x, y)$ mit beliebigen Parametern und standard Mengen $X$ und $Y$ gilt: wenn es zu jedem standard $x \in X$ ein standard $y \in Y$ gibt, für welches $\phi(x, y)$ gilt, dann gibt es eine standard Funktion $f : X \to Y$, so daß für alle standard $x \in X$ gilt $\phi(x, f(x))$.*

*Beweis.* Standardisierung definiert für jedes $x \in X$ eine standard Menge

$$^{\mathrm{s}}\{y \in Y : \phi(x, y)\} .$$

Damit bilden wir die folgende Standardisierung:

$$^{\mathrm{s}}\{\langle x, {}^{\mathrm{s}}\{y \in Y : \phi(x, y)\}\rangle : x \in X\} ,$$

die nach Voraussetzung nicht leer ist und eine standard Funktion $h$ definiert, die jedem standard $x \in X$ eine nicht leere standard Untermenge von $Y$ definiert. Nach Transfer gilt daher, daß jedem $x \in X$ eine nicht leere Untermenge aus $Y$ zugeordnet wird. Die Menge dieser Untermengen besitzt nach dem Auswahlaxiom eine Auswahlfunktion $g$, die jeder dieser Untermengen eines ihrer Elemente zuordnet. Nach Transfer kann diese Auswahlfunktion standard gewählt werden. Dann ist $f = g \circ h$ eine geeignete Funktion. □

Ein anderer Satz über die Existenz von Funktionen ist der folgende:

**Theorem 2.11.** *Es sei $\phi(x, y)$ eine $\in$-Relation mit beliebigen Parametern. Wenn es zu jedem standard $x \in X$ ein $y \in Y$ gibt, so daß $\phi(x, y)$ erfüllt ist, dann gibt es eine Funktion $f : X' \subset X \to Y$, so daß für alle $x \in X'$ gilt $\phi(x, f(x))$ und $X_\sigma \subseteq X'$. Anders ausgedrückt: es gibt eine auf einer für $X$ ausreichenden Menge eine Funktion, die $\phi$ erfüllt.*

*Beweis.* Durch externe Induktion beweist man leicht, daß man unter der Voraussetzung des Theorems für jede standard endliche Untermenge $Z$ von $X$ eine Funktion $f : Z \to Y$ findet, die $\phi$ erfüllt.

Die Menge $\mathcal{X} := \left\{Z \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) : \exists f \in Y^Z \, \forall x \in Z \, \phi(x, f(x))\right\}$ enthält alle standard endlichen Teilmengen von $X$ nach Annahme. Also enthält sie auch eine endliche Teilmenge $X'$ von $X$, die alle standard Elemente von $X$ enthält. Als Element von $\mathcal{X}$ erfüllt sie die definierende Bedingung: $\exists f \in Y^{X'} \, \forall x \in X' \, \phi(x, f(x))$. □

2.3. **Grundbegriffe der Analysis in BST.** Im folgenden werde ich die Anfangsgründe der Analysis nicht aus der Kenntnis der klassischen Analysis heraus entwickeln, sondern den geschilderten Sinn, der hinter den Axiomen steht, als Ausgangspunkt nehmen und die klassischen Begriffe daraus ableiten.

Die folgenden Ausführungen enthalten vieles, das dem Kenner der modelltheoretischen Variante in der dort auftretenden Verkleidung wohlvertraut ist. Im Prinzip ist das alles seit Robinson bekannt, aber der Sinngehalt ist hier ein ganz anderer. Robinson sieht sich außerstande einen Sinn im Begriff eines unendlichen Bereiches zu erkennen, obwohl er einem für ihn nachvollziehbaren Sinn nicht ablehnend gegenüberstehen würde; man müßte ihn nur finden[10].

Insbesondere sind hier alle Beweise so gebaut, daß sie nicht auf Axiome wie Saturation oder Idealisierung (wie in der Modelltheorie bzw. IST) aufbauen, sondern auf Finitisierbarkeit.

Anschaulich ist das die Annahme, daß die Theorie unendlicher Mengen eine Abstraktion einer Theorie unüberschaubar großer endlicher Mengen ist und daß jede Untermenge von $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(S)$, welche alle standard endlichen Untermengen von $S$ enthält, eine endliche Untermenge von $S$ enthält, die schon alle standard Elemente von $S$ enthält (durch welche die Standardisierung von $S$ vollständig bestimmt ist).

2.3.1. *Nichtextensionale Begriffe.* Ich rufe an dieser Stelle nochmals in Erinnerung, daß $\{x \in M : \phi(x)\}$ vieles bedeuten kann:

- wenn $\phi(x)$ eine $\in$-Formel mit beliebigen Parametern ist, dann wissen wir aus dem Separationsschema in $\in$-Sprache, daß es sich um eine Untermenge der Menge $M$ handelt;
- wenn $\phi(x)$ eine st-$\in$-Formel mit beliebigen Parametern ist, dann ist durch $\{x \in M : \phi(x)\}$ i.a. keine Menge, sondern ein unscharfer Bereich bezeichnet; ob das wirklich der Fall ist, muß man von Fall zu Fall entscheiden[11];
- wenn wir für $\phi(x)$ die Formel $\mathrm{st}(x)$ nehmen, erhalten wir i.a. den unscharfen Bereich der standard Elemente, der jedoch bei standard endlichen Mengen $M$ mit der Menge selbst zusammenfällt (Theorem 2.7); dieser Bereich der standard Elemente einer Menge $M$ heißt standard Kern der Menge $M$;
- die Standardisierung eines Bereiches $\mathcal{B}$ ist die eindeutig bestimmte Menge, deren standard Elemente genau die standard Elemente von $\mathcal{B}$ sind.

Aus dem Auftreten der strikt externen Mengen (unscharfen Bereiche) folgen die *Überschußprinzipien*: wenn eine strikt externe Menge in einer Menge enthalten ist oder umgekehrt eine Menge in einer strikt externen, dann liegt jeweils strikte Inklusion vor.

> Ein unscharfer Bereich innerhalb einer Menge ist strikt enthalten (sonst wäre er nicht unscharf). Eine Menge innerhalb eines unscharfen Bereichs ist strikt kleiner als dieser.

**Beispiel 3.** *Jede Untermenge von $\mathbb{N}$, welche alle nonstandard Zahlen enthält, muß standard Zahlen enthalten. Jede Untermenge von $\mathbb{N}$, welche alle standard Zahlen enthält, muß nonstandard Elemente enthalten.*

---

[10] siehe *Formalism 64* in [R]

[11] Sei $\phi(x) :\equiv \mathrm{st}(x) \vee \neg\mathrm{st}(x)$, dann gilt natürlich $M = \{x \in M : \phi(x)\}$, weil jedes $x$ entweder standard oder nonstandard ist. Die Präsenz von st in einer Formel bedeutet nicht zwangsläufig, daß sich das Prädikat nicht völlig aus der Formel eliminieren läßt.

2.3.2. *Galaxien in den natürlichen Zahlen.*

**Definition 2.12.** Eine *Galaxie* $G$ ist ein unscharfer Bereich in den natürlichen Zahlen, in welchem für je zwei Elemente $m, n$ gilt $\mathrm{st}\,(|m-n|)$.

**Theorem 2.13.** *Die Galaxien sind strikt extern. Zwischen je zwei verschiedenen Galaxien liegt eine weitere. Die standard natürlichen Zahlen bilden eine Galaxie, die unterhalb aller anderen liegt.*

*Beweis.* Jede Galaxie $G$ ist beschränkt, denn wenn $m \in G$ ist und $k$ beliebige nonstandard Zahl ist, dann ist $m + k$ eine obere Schranke von $G$. Wäre $G$ nicht strikt extern, also eine Menge, hätte $G$ ein größtes Element, aber der Nachfolger davon müßte immer noch in $G$ liegen. Widerspruch.

Wenn $G_1, G_2$ zwei verschiedene Galaxien sind, dann gilt für je zwei Elemente $m, n$, $m \in G_1$ und $n \in G_2$ stets $\forall^{\mathrm{st}} k\ |m-n| > k$. Also ist $\left[\frac{m+n}{2}\right]$ weder in $G_1$ noch in $G_2$, gehört also einer anderen Galaxie an.

Die dritte Behauptung ist offenkundig. □

> Die Menge der natürlichen Zahlen zerfällt in unscharfe Bereiche, Galaxien genannt, innerhalb derer jede Zahl relativ zu jeder anderen realisiert ist. Mit Ausnahme der Galaxie der realisierten Zahlen bestehen alle anderen aus (absolut) unrealisierten Zahlen und zwischen je zwei verschiedenen Galaxien liegt eine weitere von beiden verschiedene.
>
> Das gibt uns schon einen Vorgeschmack von dem, was kommt. Der monotone, in $\in$-Sprache völlig homogene Bereich der natürlichen Zahlen gewinnt plötzlich eine reiche innere Struktur: es erscheinen die unscharfen Bereiche der Galaxien.
>
> Die standard Ordinalzahlen in jeder standard unendlichen Ordinalzahl $\alpha$ sind wegen Finitisierbarkeit in einer endlichen Untermenge von $\alpha$ enthalten. Die Anzahl der Elemente dieser Untermenge gehört also zu einer der Galaxien, die von der untersten verschieden sind.
>
> Weiter präzisieren kann man diese Zahl nicht, weil die unscharfen Bereiche (externen Mengen) nicht mit den üblichen Argumenten behandelt werden können. Dennoch ist es ein Hinweis auf eine ganz andere Sicht des Mengenuniversums, daß die standard Kardinalzahlen (die kofinal zu allen Kardinalzahlen sind) eine Art unscharfer Größenabschätzung durch unrealisierte natürliche Zahlen besitzen. In diesem Sinne könnte man die transfiniten Ordinalzahlen als eine Abstraktion von Verhältnissen sehen, die in unscharfer Weise bereits in der Menge der natürlichen Zahlen angelegt ist.

2.3.3. *Die rationalen Zahlen.* Die Einführung der reellen Zahlen gestaltet sich in dieser Theorie sehr einfach. Wir gehen dazu von der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen aus, die in bekannter Weise aus $\omega$ durch elementare mengentheoretische Operationen definiert wird. Wir besitzen aber jetzt innerhalb von $\mathbb{Q}$ viele neue (nichtextensionale) Begriffe:

**Definition 2.14.** Eine Zahl ist *begrenzt*, wenn ihr Absolutbetrag durch eine **standard** Zahl beschränkt ist (d.h. die nonstandard natürlichen Zahlen sind alle unbegrenzt, aber natürlich beschränkt!). Eine Zahl ist *infinitesimal*, wenn ihr Absolutbetrag kleiner als alle positiven standard Zahlen ist. $a \approx b$ bedeutet $a - b$ ist infinitesimal. Die (rationale) Zahl $a$ ist *deutlich größer* als $b$ ($a \gg b$), wenn $a > b \wedge a \not\approx b$. $a$ ist *näherungsweise kleiner oder gleich* ($a \lessapprox b$), wenn $a < b \vee a \approx b$.

**Theorem 2.15.** *Die Summe zweier infinitesimaler Zahlen aus $\mathbb{Q}$ ist infinitesimal. Das Produkt einer infinitesimalen und einer begrenzten rationalen Zahl ist infinitesimal. Addition und Multiplikation sind auf den begrenzten Zahlen mit $\approx$ kompatibel.*

*Beweis.* Wenn $c$ begrenzt ist, dann ist $2c$ begrenzt, denn aus $|c| < s$ mit $s$ standard Zahl, folgt ja $|2c| < 2s$ und $2s$ ist standard. Also folgt mittels Kontraposition, daß mit $c$ auch $c/2$ unbegrenzt ist. Auf ähnliche Weise folgt, daß mit $d$ infinitesimal auch $2d$ infinitesimal ist.

Wenn $a > 0$ und $b > 0$ begrenzt bzw. infinitesimal sind, aber $a+b = c$ unbegrenzt bzw. nicht infinitesimal wäre, dann folgt, daß $a < c/2$ und $b < c/2$, d.h. $c < c$. Wenn $b$ begrenzt ist, aber $ab = c \gg 0$, dann folgt aus $a < 1$ die Ungleichung $c = ab < b$, also ist $b$ nicht infinitesimal und $a = \frac{c}{b} > \frac{C}{B}$, wobei $C$ eine standard positive Zahl $< c$ ist und $B$ eine standard positive Zahl $> b$ ist. Diese Widersprüche beweisen die ersten beiden Behauptungen. Die dritte ist eine unmittelbare Folgerung daraus. □

> Eine rationale Zahl ist *infinitesimal*, wenn ihr Absolutbetrag kleiner ist als alle Brüche $\frac{1}{n}$ für realisierte $n$. Die Summe zweier infinitesimaler Zahlen ist infinitesimal. Eine rationale Zahl ist begrenzt, wenn ihr Absolutbetrag durch eine realisierte, natürliche Zahl beschränkt ist. Das Produkt einer infinitesimalen mit einer begrenzten Zahl ist infinitesimal. Infinitesimale Unterschiede in den Summanden (bzw. Faktoren) einer Summe (bzw. eines Produktes) von zwei begrenzten rationalen Zahlen führen nur zu infinitesimalen Unterschieden in der Summe (bzw. dem Produkt). Eine begrenzte rationale Zahl ist *realisiert*, wenn die vollständig gekürzte Form Quotient zweier realisierter Zahlen ist. Sie heißt *unrealisiert* in allen anderen Fällen.

2.3.4. *Dedekind-Schnitte.* Die reellen Zahlen werden entweder als Dedekind-Schnitte im Körper $\mathbb{Q}$ eingeführt oder als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$. Beide Arten sind nicht schwierig durchzuführen, aber benötigen viel pedantische Arbeit, um alle mengentheoretisch relevanten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ nachzuweisen.

Wir beginnen mit den Dedekind-Schnitten, aber wir beweisen auf nichtstandard Weise, daß die Menge der Schnitte alle geforderten Eigenschaften besitzt.

In $\mathbb{Q}$ stellen wir fest, daß zu jeder rationalen Zahl $r$ das Komplement des Singletons $\{r\}$ wegen der Linearität der Ordnung in zwei Mengen zerfällt:

$$U_r := \{x \in \mathbb{Q} : x < r\} \text{ und } : O_r = \{x \in \mathbb{Q} : x > r\}.$$

Die Menge der Paare $\{\langle U_r, O_r \rangle : r \in \mathbb{Q}\}$ ist offensichtlich in Bijektion mit $\mathbb{Q}$. Dies sind die *rationalen Schnitte* in $\mathbb{Q}$. Man kann die Schnittmengen durch ihre von $r$ unabhängigen Eigenschaften charakterisieren:

(1) alle Zahlen aus der unteren Schnittmenge sind kleiner als alle Zahlen aus der oberen Schnittmenge,

(2) wenn $x$ zu einer oberen (bzw. unteren) Schnittmenge gehört, gehören auch alle Zahlen $y > x$ (bzw. $y < x$) zu dieser Schnittmenge,
(3) wenn $x$ zu einer oberen (bzw. unteren) Schnittmenge gehört, dann gibt es eine Zahl $y < x$ (bzw. $y > x$), die auch zu dieser Schnittmenge gehört, oder anders gesagt, die obere (bzw. untere) Schnittmenge hat kein kleinstes (bzw. größtes) Element,
(4) zu jeder positiven Zahl $\epsilon$ gibt es Elemente $x$ aus der unteren und $y$ aus der oberen Schnittmenge, so daß $y - x < \epsilon$.

Ein *Dedekind-Schnitt* ist ein Paar $\langle U, O\rangle$ von Untermengen von $\mathbb{Q}$ mit den gerade beschriebenen Eigenschaften. Die Gesamtheit dieser Schnitte ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Sie wird aus dem cartesischen Produkt $\mathcal{P}(\mathbb{Q})\times\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ der Potenzmenge von $\mathbb{Q}$ mit sich selbst durch Separation definiert. Jene, die von einer rationalen Zahl erzeugt werden, können wir mit den rationalen Zahlen identifizieren. Wir merken hier an, daß die Menge aller Schnitte in den rationalen Zahlen eine standard Menge ist, weil sie aus einer standard Menge, nämlich $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ durch eine $\in$-Formel mit standard Parametern (der $<$-Relation auf $\mathbb{Q}$) ausgesondert wird.

Das Komplement der Vereinigung der Schnittmengen soll der *Spalt* des Schnittes heißen (d.h. der Spalt ist eine Menge). Es ist mittels der genannten Eigenschaften eine leichte Sache nachzuweisen, daß das Komplement der Vereinigung $U \cup O$ aus höchstens einem Punkt besteht. Der Spalt enthält also höchstens einen Punkt. Beispiele (wie $\sqrt{2}$) zeigen, daß es Schnitte gibt, deren Schnittmengen keine rationale Zahl einschließen, wo der Spalt also **leer** ist. Diese reelle Zahl ist also eigentlich nur die Menge all ihrer Approximationen. Diese Schnitte mit leerem Spalt sind die *irrationalen Zahlen* oder die *irrationalen Schnitte*.

Unter einer *Schachtelung* verstehen wir ein Paar von Mengen $\langle V, W\rangle$, das von den vier Schnitteigenschaften nur die erste, dritte und vierte erfüllt. Es ist klar, daß man aus einer Schachtelung $\langle V, W\rangle$ einen Schnitt erhält, wenn man zu $V$ alle Elemente hinzufügt, die kleiner als irgendeines der Elemente von $V$ sind, und enstprechend zu $W$ alle Elemente, die größer als irgendein Element von $W$ sind.

Statt nun dem klassischen Argument zu folgen, um zu zeigen, daß man auf den Schnitten die algebraischen Operationen$+, \cdot$ in natürlicher Weise so definieren kann, daß das Gebilde ein Körper ist, der ein isomorphes Bild von $\mathbb{Q}$ enthält und der die Eigenschaft der Vollständigkeit besitzt (was nicht schwierig, aber sehr mühsam ist), arbeiten wir in der erweiterten Sprache.

> In dieser wird das Bild der Schnitte nämlich reicher: wenn wir den Unterschied zwischen realisierten und unrealisierten rationalen Zahlen berücksichtigen, können wir den punktgroßen (bzw. leeren) Spalt in den irrationalen Schnitten ein wenig vergrößern, so daß dann doch was in dem erweiterten Spalt liegt.

Jeder **standard** Dedekind-Schnitt wird durch **standard** Schnittmengen $\langle U, O\rangle$ definiert. Jeder dieser Schnitte definiert eine *Monade*, die (strikt) externe Menge der rationalen Zahlen $r$, welche oberhalb aller standard Zahlen aus $U$ und unterhalb aller standard Zahlen aus $O$ liegen. Offensichtlich haben je zwei Zahlen aus dieser externen Menge infinitesimalen Abstand voneinander, denn nach Schnitteigenschaft 4. und Transfer kann für **standard** $x \in U$ und **standard** $y \in O$ die Differenz $y - x$ kleiner als jede **standard** positive Zahl gemacht werden. Außerdem sind die Zahlen dieser externen Menge begrenzt (durch beliebige standard Zahlen aus $U$ und $O$). Offen bleibt zunächst, ob solche Elemente überhaupt vorhanden sind.

**Theorem 2.16.** *Die Monade eines standard irrationalen Schnittes ist nicht leer.*

*Beweis.* Es seien $U' \subset U$ und $O' \subset O$ ausreichende Mengen der beiden Schnittmengen. Beide sind endlich, so daß $U'$ ein größtes Element $u$ und $O'$ ein kleinstes Element $o$ enthält.

Beide müssen nichtstandard sein. Es genügt den Beweis für $u$ auszuführen: wäre $u$ standard, dann gäbe es gemäß Schnitteigenschaft 3. und Transfer in $U$ noch eine größere standard Zahl, aber $u$ ist $\geq$ als alle standard Zahlen von $U$. □

Es gibt noch eine andere Definition einer Monade: eine Monade ist die externe Menge aller rationalen Zahlen, die infinitesimalen Abstand von einer festen rationalen Zahl haben. Es ist offensichtlich, daß die vorher definierten Monaden von dieser Art sind. Daß aber **alle** begrenzten Monaden von standard Schnitten erzeugt werden, ist nicht klar.

**Theorem 2.17.** *Jede begrenzte Monade erzeugt einen standard Dedekindschnitt: $U$ (bzw. $O$) ist die Standardisierung der externen Menge aller rationalen Zahlen unterhalb (bzw. oberhalb) der Monade.*

*Beweis.* Es muß gezeigt werden, daß die vier Bedingungen für einen Schnitt relativiert auf standard Zahlen erfüllt sind. Die erste und zweite Bedingung sind offensichtlich erfüllt.

Den Beweis der dritten führen wir indirekt. Wir nehmen also an, daß z.B. die standard Elemente der unteren Schnittmenge ein maximales standard Element $u$ besitzen. Es sei $m$ ein Element der Monade, so daß $u < m$ gilt. Wenn $m - u \approx 0$, dann gibt es auch noch Elemente der Monade unterhalb von $u$, nämlich $u-(m-u)$, denn $m-(u-(m-u)) = 2(m-u) \approx 0$. Das ist ein Widerspruch, also gilt $m-u \gg 0$. Dann gibt es aber unterhalb der Monade noch standard Zahlen oberhalb von $u$, weil $u+\frac{1}{n}$ für genügend großes standard $n$ standard ist und unterhalb von $m$ liegt. Diese Widersprüche zeigen, daß die dritte Eigenschaft für die untere Menge erfüllt ist und für die obere gilt ein analoges Argument.

Es bleibt die vierte Eigenschaft zu zeigen. Angenommen diese Eigenschaft ist verletzt, so daß ein standard $\epsilon > 0$ existiert mit $y - x > \epsilon$ für alle standard $x \in U$ und $y \in O$. Wir wählen zwei solche Elemente $x$ und $y$. Dann ist $\frac{x+y}{2}$ standard und hat den halben Abstand zu $x$ und zu $y$. Dieses Mittel liegt entweder in der unteren Schnittmenge, der oberen oder in der Monade. Liegt es in der unteren, wiederholen wir die Mittelbildung mit $y$ und liegt es in der oberen, dann wiederholen wir die Mittelbildung mit $x$. Dies kann aber nicht unbegrenzt so weiter gehen, da jedesmal der Abstand halbiert wird. Also kommen wir nach standard endlich vielen Schritten in die Situation, wo das Mittel $m$ in der Monade liegt. Dort kann aber höchstens ein standard Element liegen, alle kleineren liegen also in $U$ und alle größeren in $O$. Das kann aber nicht sein, weil es standard Elemente gibt mit beliebig kleinem standard Abstand zu einer festen standard Zahl. Indem wir in $U$ näher als $\frac{\epsilon}{2}$ an $m$ herangehen und analog in $O$, mit dem Erfolg den Minimalabstand zwischen standard Elementen von $U$ und $O$ zu unterschreiten. □

Ein Schnitt heißt *begrenzt*, wenn beide Schnittmengen standard Zahlen enthalten. Jedem begrenzten Schnitt $\langle U, O\rangle$ ordnen wir jetzt einen *unscharfen Schnitt* $\langle U', O'\rangle$ zu, wobei $U'$ die externe Menge ist, welche aus allen standard Elementen von $U$ ohne das maximale besteht, falls ein solches existiert, und $O'$ jene ist, welche aus allen standard Elementen von $O$ besteht ohne das minimale, falls eines existiert.

**Theorem 2.18.** *Jeder unscharfe Schnitt $\langle U', O' \rangle$ (zu einem Schnitt $\langle U, O \rangle$) definiert eine Monade als die externe Menge aller rationalen Zahlen, welche zwischen $U'$ und $O'$ liegen. $\langle {}^{\mathrm{s}}U', {}^{\mathrm{s}}O' \rangle$ ist ein standard Schnitt. Liegt eine (standard) rationale Zahl im Spalt des Schnittes handelt es sich entweder um das maximale Element von $U_\sigma$ oder das minimale von $O_\sigma$.*

*Beweis.* Es sei $u$ maximales Element von $U_\sigma$ und $o$ minimales Element von $O_\sigma$. Angenommen $u$ ist standard, dann ist $o$ nonstandard. Andernfalls wäre ja $o - u$ eine standard positive Zahl (Gleichheit ist wegen der Disjunktheit von $U$ und $O$ ausgeschlossen). Zwischen diesen beiden standard Zahlen gäbe es weitere standard Zahlen, die alle zu $O$ gehören müßten, da $u$ maximal in $U$ ist. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung. Der Beweis für $o$ standard verläuft analog, es muß dann $u$ nonstandard sein.

Wir definieren $U'$ als $U_\sigma$ ohne $u$, falls dieses maximale Element existiert, bzw. $V'$ als $V_\sigma$ ohne $o$, falls dieses minimale Element existiert. Offensichtlich gilt $U' < u < V'$ bzw. $U' < o < V'$. Also liegt dieses maximale (bzw. minimale) standard Element im unscharfen Spalt, falls es existiert. Mehr als ein standard Element kann aber im unscharfen Spalt nicht auftreten. Im Falle, daß $u$ existiert, müßten diese weiteren Elemente alle in $V_\sigma$ liegen, weil die Gesamtheit der standard Elemente sich auf $U_\sigma$und $V_\sigma$ verteilt. Das ist aber ein Widerspruch. Analog verläuft das Argument für $o$.

Jede Zahl infinitesimal nahe an $u$ bzw. $o$ liegt aber dann zwischen $U'$und $V'$ und zwei Zahlen mit einem nicht infinitesimalen Abstand können nicht in dem unscharfen Spalt liegen, weil zwischen diesen unbegrenzt viele standard Elemente auftauchen würden, die entweder in $U'$ oder $V'$ liegen müßten. Wenn weder $u$ noch $o$ existieren müssen dennoch nonstandard rationale Zahlen darin liegen, weil jeweils ausreichende Mengen für $U$ bzw. $V$ ein Maximum bzw. Minimum hätten, die aber in diesem Fall beide nichtstandard wären. Also gibt es mindestens zwei Zahlen und daher unendlich viele in dem unscharfen Spalt. □

Wenn wir unter der Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Monaden den Bereich aller Summen von Summanden aus je einer der Monaden verstehen, dann folgt aus Theorem 2.15, daß die Summe und Differenz zweier begrenzter Monaden wieder eine solche ist und ebenso für das Produkt und daß der Quotient zweier begrenzter Monaden wieder eine begrenzte Monade ist, falls die Monade im Nenner von der Nullmonade (die zum Schnitt der 0 gehörende) verschieden ist.

Damit ist bereits die Arbeit geleistet: wir definieren die Summe (bzw. Differenz) zweier standard Schnitte $\langle U_1, O_1 \rangle$ und $\langle U_2, O_2 \rangle$ als jenen standard Schnitt, der von der Summe (bzw. Differenz) der entsprechenden Monaden erzeugt wird, und ebenso für das Produkt (bzw. die Division falls im Nenner nicht die Nullmonade erscheint).

Weiters definieren wir eine Ordnung auf den standard Schnitten, indem wir festsetzen, daß $\langle U_1, O_1 \rangle < \langle U_2, O_2 \rangle$ genau dann, wenn für die zugeordneten Monaden diese Ungleichung gilt. Das ist äquivalent zu den Inklusionen $U_1 \subset U_2$ und $O_2 \subset O_1$. Daraus folgt insbesondere, daß für eine rationale Zahl und einen beliebigen Schnitt $\langle U, O \rangle$ die Beziehung $\langle U_r, O_r \rangle < \langle U, O \rangle$ dann und nur dann gilt, wenn $r \in U$.

**Theorem 2.19.** *Die auf den Standardschnitten eben definierten Operationen* $+, \cdot$ *und die Relation* $<$ *übertragen sich auf die Menge* $\mathbb{R}$ *aller Schnitte, so daß die Struktur* $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ *ein echter Erweiterungskörper von* $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ *in dem Sinne ist, daß die rationalen Schnitte in* $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ *einen Unterkörper bilden, der isomorph zu* $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ *ist.*

*Beweis.* Die gerade definierten algebraischen Operationen und die Ordnungsrelation auf den standard Schnitten definieren standard Operationen (wegen 2.10) und eine standard Ordnungsrelation auf der standard Menge aller Schnitte. Die Ordnungsrelation ist allgemein durch die oben angegebenen Inklusionen chrakterisiert (Transfer). Die Menge aller Schnitte enthält die echte Untermenge aller rationalen Schnitte, 0 und 1 sind als die rationalen Schnitte der Zahlen 0 und 1 definiert, und diese Struktur ist isomorph zum Körper der rationalen Zahlen. □

Wir erweitern also den von den aktual unendlichen Schnittmengen erzeugten Spalt, welcher höchstens einen Punkt enthält, indem wir in den Schnittmengen nur die realisierten (d.h. standard) rationalen Zahlen beachten, die verbleibenden füllen den verbreiterten Spalt. Auch in den leeren Spalten befinden sich nun unrealisierte Zahlen. Diese Zahlen sind die Träger der Rechnungen. Alle benötigten Eigenschaften der Schnitte folgen aus den Eigenschaften der Zahlen in den verbreiterten Spalten. Transfer und Standardisierung entfernen am Ende die „Unschärfe", die durch den nicht-extensionalen Charakter des Prädikates „realisiert" erzeugt werden. Auf der formalen Ebene handelt es sich offenbar um eine Art von Grenzwertargument, das einfach von den Formeln der Theorie außerhalb der Objektebene abgewickelt wird, weil mangels Separation für die volle Sprache diese Formeln gar nicht auf der Objektebene als Untermengen in Erscheinung treten, wo sie im übrigen die Theorie sofort inkonsistent machen würden.

Diese Deutung gibt der anschaulichen Vorstellung von den reellen Zahlen, wie sie etwa in dem Rechnen mit (endlichen) Dezimalbrüchen sich niederschlägt einen unmittelbaren Sinn: die Idee ist doch, daß beim unbegrenzten Verlängern der endlichen Dezimalbrüche nicht ein Chaos ausbricht, sondern eine feste Struktur (reelle Zahlen) sich manifestieren wird. Genau das zeigt dieses Argument in sinnhafter Weise.

Man könnte den bekannten Spruch des Bischofs Berkeley, daß es sich bei den Infinitesimalen um die „Geister von verstorbenen Größen" *(ghosts of departed quantities)* handele, variieren zu: „die Infinitesimalen sind die Umriße von (in ihrer Kleinheit) noch nicht realisierten Größen." Ebenso sind die unrealisierten natürlichen Zahlen jene, bis zu denen wir noch nicht konkret hochgezählt haben, deren Existenz wir aber antizipieren.

Berkeleys Kritik nimmt genau die Haltung ein, an der die spätere Ächtung des Infinitesimalkalküls sich festgemacht hat: die Ersetzung von potenzieller Unendlichkeit durch die aktuale. Dann sind die unrealisierten natürlichen Zahlen tatsächlich die Geister von verstorbenen Größen, Größen, für die gar kein Platz ist und deren

> Verwendung in dem enstprechend formalisierten Rahmen widersprüchlich ist.

Solche Sinndeutungen können und sollen die Formalisierung nicht ersetzen! Aber es wird erkennbar, daß diese Formalisierung einen Sinn unterstützt, der durchaus kompatibel mit den Äußerungen der Mathematiker aus der Zeit des Infinitesimalkalküls ist. Da dieser Sinn keine neuen Objekte einführt, wird die Verdoppelung der Struktur in der modelltheoretischen Variante hier vermieden. $\mathbb{R}$ erscheint hier als die übliche Struktur, in der die standard Elemente ein nicht extensionales Abbild von $\mathbb{R}$ repräsentieren.

Im Grunde fehlte damals der mengentheoretische Teil und die Argumentation verlief ohne die mengentheoretische Darstellung der Begriffe. Dann hat man diese eingeführt und die andere verworfen. **BST** bietet eine Möglichkeit beide harmonisch miteinander zu vereinen[12].

Jetzt bleibt nur noch die Vollständigkeit. Dazu betrachten wir einen beliebigen Dedekind-Schnitt $\langle \mathcal{U}, \mathcal{O} \rangle$ in den reellen Zahlen. Hier ist $\mathcal{U}$ eine Menge von Schnitten $\langle U, O \rangle$ in $\mathbb{Q}$ und $\mathcal{O}$ ebenso. Die beiden Schnittmengen $\mathcal{U}, \mathcal{O}$ besitzen wieder die früher angegebenen vier charakteristischen Eigenschaften, die natürlich hier mit den für Schnitte neu definierten Begriffen gelesen werden müsssen.

**Theorem 2.20.** *$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ ist vollständig bezüglich der Bildung von Schnitten, d.h. jeder Schnitt in $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ enthält genau einen Schnitt in seinem Spalt.*

*Beweis.* Dieser Sachverhalt beruht auf einem bekannten $\in$-Argument, das mangels einer nicht-extensionalen Wendung hier nicht ausgeführt wird. Es sei $\pi_i$ für $i = 1, 2$ die Projektion auf das $i$-te Element eines geordneten Paares. Man zeigt, daß

$$\left\langle \bigcup \pi_1 \mathcal{U}, \bigcup \pi_2 \mathcal{O} \right\rangle$$

ein Dedekindschnitt in den rationalen Zahlen, also eine reelle Zahl ist, die im Spalt von $\langle \mathcal{U}, \mathcal{O} \rangle$liegt. □

**Corollary 2.21.** *Zu jeder begrenzten reellen Zahl $a$ gehört eine eindeutig bestimmte standard reelle Zahl $^\circ a$, die infinitesimale Entfernung von $a$ hat.*

*Beweis.* Eine unmittelbare Folge von 2.18. □

**Definition 2.22.** Die eindeutig bestimmte standard reelle Zahl $^\circ a$, die zu einer beliebigen begrenzten reellen Zahl gehört, heißt *Standardteil* von $a$. Eine reelle Zahl, die infinitesimalen Abstand von einer standard Zahl hat, heißt *nahezu standard.*

> Wenn wir in der Mengenhierarchie höher steigen (ein Schnitt besteht aus zwei unendlichen Schnittmengen), dann verliert die ursprüngliche Bedeutung (im Kontext der natürlichen Zahlen) des Prädikates „realisiert" an Bedeutung. Aber st erzeugt auf den höheren Stufen automatisch neue Sinne, die sich ganz natürlich im jeweiligen Kontext entwicklen.
>
> Nachdem die reellen Zahlen definiert sind, muß man sich nicht darum kümmern, wie die reellen Zahlen als Mengen aussehen, sondern man kann sie wie Urelemente behandeln. Aber wir besitzen

[12]**IST** erhebt mit seinem Idealisierungsaxiom den Anspruch, das Universum der standard Mengen selbst zu finitisieren, wodurch unerwünschte metamathematische Konsequenzen eintreten, die durch keinerlei erkennbaren Gewinn für die mathematische Argumentation kompensiert werden.

jetzt auf den reellen Zahlen all die nicht-extensionalen Begriffe, die auf den rationalen Zahlen aufgetaucht sind und dort noch von dem alten Sinn von „realisiert" getragen wurden. Hier entfaltet sich jetzt ein Sinn, der sehr weitgehend dem entspricht, was man in der Epoche des Infinitesimalskalküls findet.

Man kann den unscharfen Bereich der begrenzten reellen Zahlen so beschreiben: jede standard reelle Zahl ist umgeben von der Monade der infinitesimal benachbarten reellen Zahlen. Die standard reellen Zahlen sind jene, deren Spalt von keiner rationalen Zahl (nicht einmal den unrealisierten) je gefüllt wird, der aber so eingekeilt ist zwischen den rationalen, daß er sich im Kontext von Rechnungen mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Näherungen ersetzen läßt.

2.3.5. *Supremum und Infimum.* Ein wesentlicher Begriff im Zusammenhang mit unendlichen Zahlenmengen ist das Supremum bzw. Infimum. Die naheliegende Idee ist, bei einer standard Menge einfach das Maximum (bzw. Minimum) einer ausreichenden Menge und davon den Standardteil zu nehmen, weil bei einer standard Menge die nonstandard Elemente der ausreichenden Menge nur unwesentliche Abweichungen verursachen können. Genauso ergibt es sich auch.

**Theorem 2.23.** *Jede nach unten (bzw. oben) beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ besitzt eine größte untere (bzw. kleinste obere) Schranke.*

*Beweis.* Es genügt gemäß Transfer, dies für standard Mengen zu beweisen. Und es genügt, den Fall des Infimums zu behandeln. Also sei $S$ eine nach unten begrenzte standard Menge. Wir wählen eine ausreichende Menge $A$ für $S$ und bezeichnen ihr Minimum durch $a$. $a$ ist $\leq$ als jede standard Zahl aus $A$ und daher $\leq$ als jede standard Zahl aus $S$. Also ist $a$ eine begrenzte Zahl, denn sie ist ja durch die standard Elemente von $A$ nach oben und durch eine untere Grenze von $S$ nach unten abgeschätzt.

$a$ besitzt also einen Standardteil $^\circ a$, für den folgendes gilt: aus $a \leq s$ für alle standard $s \in S$ folgt $^\circ a \leq s$ und für jedes standard $\epsilon > 0$ gibt es ein standard $s \in S$, so daß $s < {}^\circ a + \epsilon$, denn andernfalls wäre ja $^\circ a + \epsilon \leq s$ für alle standard $s \in S$ und gemäß Transfer sogar für alle $s \in S$, also insbesondere für $a$, was unmöglich ist, weil $a - {}^\circ a < \epsilon$. Damit ist die klassische Charakterisierung des Infimums für $^\circ a$ nachgewiesen. □

Wegen Finitisierbarkeit kann man alle standard reellen Zahlen in einer endlichen Punktmenge einfangen. Jede begrenzte, standard Punktmenge kann also durch eine ausreichende Menge begrenzter Zahlen ersetzt werden, die als endliche Menge ein Maximum und ein Minimum hat. Da diese beiden begrenzt sind, besitzen sie einen Standardteil, eine infinitesimal benachbarte standard reelle Zahl. Transfer und Standardisierung erzwingen, daß es sich dabei um Supremum und Infimum handeln muß.

Jede endliche Menge von reellen Zahlen kann man der Größe nach ordnen. Innerhalb der begrenzten Zahlen muß daher eine ausreichende Menge, welche als monoton wachsende endliche Folge gegeben ist, infinitesimale Schrittweite haben. Viele analytische Konstruktionen, die auf einer endlichen, diskreten Menge trivial sind, führen so zu Lösungen, die man nur noch in Beziehung setzen muß zu einem $\in$-definierten Objekt, um die Lösung des eigentlichen analytischen Problems zu finden.

Das Beispiel im ersten Teil ist von dieser Art. Ein Beispiel ganz anderer Art sind die Taylorreihen, die nichts anderes sind als polynomiale Interpolation (Newton) auf (nonstandard) endlich vielen Stützstellen der gegebenen standard Funktion unter geeigneten Bedingungen an die Funktion.

2.3.6. *Cauchy-Folgen rationaler Zahlen.* Der zweite Zugang zu den reellen Zahlen geht über die Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen (Cantor).

Wie üblich ist eine (unendliche) Folge rationaler Zahlen $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Abbildung bedeutet, daß es sich um eine Menge handelt, nämlich die Menge der Zuordnungspaare $\{\langle i, x_i\rangle : i \in \mathbb{N}\}$. Falls nötig, kann man den Mengenstatus durch den Zusatz „intern" betonen. Demgegenüber stehen die externen Folgen, die einfach durch eine externe Definition (st-$\in$-Formel) beschrieben werden. Diese sind keine Mengen. Es empfiehlt sich eine Folge in die zwei unscharfen Abschnitte aufzuspalten: wir meinen mit dem *Anfang der Folge* die Folge eingeschränkt auf die standard Indizes und mit dem *Ende der Folge* die Folge eingeschränkt auf die nonstandard Indizes.

Wenn wir uns nun eine beliebige Folge vorstellen, dann interessiert uns der Fall, daß eine Folge nach einem mehr oder weniger chaotischen Verhalten im Anfang in ein kontrolliertes Ende einmündet. Wa sich einem gleich aufdrängt, ist der Fall, daß die Folgenglieder des Endes in einer begrenzten Monade liegen.

**Definition 2.24.** Eine (interne) Folge heißt *s-Cauchy-Folge* wenn die Glieder des Folgenendes alle in einer Monade liegen: $\forall^{\mathrm{nst}} i, j\, x_i \approx x_j$. Zwei s-Cauchy-Folgen $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ und $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ heißen *äquivalent*, wenn beide Folgenenden in der gleichen begrenzten Monade liegen.

Diese Definitionen sind naheliegend und haben einen klaren Sinn. Z.B. ist die Folge $\left\{\frac{1}{i+1}\right\}_{i=0}^{\infty}$ offensichtlich s-Cauchy-Folge, denn $\frac{1}{i+1} \approx \frac{1}{j+1}$ für alle nonstandard $i, j$. Aus der Warte der $\in$-Sprache sind diese Objekte sehr fremdartig und man sieht nicht, wo man sie einordnen soll. Daher jetzt ein Theorem, das uns etwas über diese Objekte sagt.

**Theorem 2.25.** *Es sei $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ eine standard Folge. Eine solche Folge ist s-Cauchy-Folge dann und nur dann, wenn sie Cauchy-Folge ist.*

*Beweis.* (i) Die Folge sei s-Cauchy-Folge. Dann sehen wir uns die Menge $M_\epsilon := \{k \in \mathbb{N} : \forall i, j > k\ |x_i - x_j| < \epsilon\}$ an. Die ist in $\in$-Sprache definiert und definiert deshalb tatsächlich eine Menge. Sei nun $\epsilon > 0$ standard. Jedes nonstandard $k$ liegt in der Menge $M_\epsilon$, denn dann sind die $i, j$ in der Bedingung auch nonstandard und daher $|x_i - x_j|$ infinitesimal, also kleiner als $\epsilon$. Nach den Überschußprinzipien liegt dann auch ein standard $k$ in der Menge. Damit haben wir gezeigt: für jedes standard $\epsilon > 0$ gibt es ein standard $k$ so daß $|x_i - x_j| < \epsilon$ für alle $i, j > k$. Da die Folge in dieser Aussage der einzige Parameter ist und als standard vorausgesetzt ist, können wir gemäß Transfer das Wort standard entfernen. Das ergibt die epsilontische Definition einer Cauchy-Folge.

(ii) Die Folge sei eine Cauchy-Folge. Wir führen den Beweis indirekt. Die Folge sei nicht s-Cauchy-Folge, d.h. es gibt zwei nonstandard Indizes $i, j$ mit $|x_i - x_j| > \epsilon > 0$

für ein standard $\epsilon$. Gemäß Transfer gibt es zu diesem standard $\epsilon > 0$ einen standard Index $k$, so daß für alle $m, n > k$ gilt $|x_m - x_n| < \epsilon$. Da $i, j$ nonstandard sind, sind sie größer als die standard Zahl $k$, so daß $|x_i - x_j| < \epsilon$. Der Widerspruch zeigt, daß die Annahme falsch ist. Die Folge ist s-Cauchy-Folge. □

**Corollary 2.26.** *Jede standard Cauchy-Folge in den rationalen Zahlen bestimmt eine begrenzte Monade in den rationalen Zahlen und damit einen standard Dedekind-Schnitt in den rationalen Zahlen, d.h. eine standard reelle Zahl. Der Limes der Folge ist gleich der von der Monade bestimmten reellen Zahl.*

*Beweis.* Die Monade ist jene, in der die Elemente $x_i$ mit nonstandard $i$ liegen. Angenommen, diese Monade ist nicht begrenzt, dann ist aber $|x_{i_0}| + 1$ für ein unbegrenztes $i_0$ eine obere Schranke für alle $|x_j|$ mit $j > k$ für beliebiges nonstandard $k$. Nach dem Überschußprinzip gilt das sogar für ein standard $k$. Also gibt es eine Schranke für die ganze Folge (nämlich $\max\{|x_0|, \ldots, |x_k|, |x_{i_0}| + 1\}$) und nach Transfer gibt es dann eine standard obere Schranke. Die Monade determiniert eine reelle Zahl $x$ für welche gilt $x_i \approx x$ für alle unbegrenzten $i$.

Es gilt jedoch $N_n := \left\{k : \forall i > k \; |x_i - x| < \frac{1}{n}\right\}$ enthält für jedes standard $n$ jedes unbegrenzte $k$ und daher auch ein standard $k$. Also gibt es gemäß Transfer zu jedem $n$ ein $k$ so daß $\forall i > k \; |x_i - x| < \frac{1}{n}$ ist. Das ist die herkömmliche Definition des Limes der Folge. Also ist die reelle Zahl in der Monade tatsächlich der Limes. □

2.3.7. *Kompaktheit.*

**Definition 2.27.** Eine reelle Zahl heißt *nahezu standard*, wenn es eine standard reelle Zahl mit infinitesimalen Abstand von jener gibt.

**Theorem 2.28.** *Eine standard Menge von reellen Zahlen ist genau dann kompakt, wenn alle ihre Elemente nahezu standard sind.*

*Beweis.* i) Es sei die standard Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Sei $m \in M$ ein beliebiger nonstandard Punkt. Zu jeder standard Überdeckung von $M$ durch Kugeln vom Radius $\frac{1}{n}$ mit standard $n$ gibt es standard endlich viele standard Kugeln, die ganz $M$ überdecken und irgendeine davon enthält daher $m$. Wir erhalten so eine standard Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}(2.10)$, so daß die Kugeln $K_{\frac{1}{i}}(x_i)$ für alle standard $i$ den Punkt $m$ enthalten. Die Folge ist offenbar eine Cauchy-Folge, die daher einen standard Grenzwert besitzt, dessen Abstand von $m$ infinitesimal ist.

ii) Es seien alle Punkte von $M$ nahezu standard. Es sei $\mathcal{U}$ eine standard offene Überdeckung. Es sei $N \subseteq M$ eine ausreichende Menge. Zu jedem standard Punkt $x \in M$ gibt es eine standard Umgebung $U$ aus $\mathcal{U}$, die $x$ enthält. Nach dem Auswahlaxiom und Transfer gibt es eine standard Funktion $f : M \to \mathcal{U}$ mit $\forall x \in M \, x \in f(x)$. Die endliche Familie $\{f(x) \in \mathcal{U} : x \in N\}$ überdeckt ganz $M$, denn jeder Punkt $x$ von $M$ liegt in einem infinitesimalen Abstand zu einem standard Punkt $y$ und daher in der standard offenen Umgebung $f(y)$ dieses Punktes. Also gibt es eine (nichtstandard, aber endliche) Überdeckung von ganz $M$, gemäß Transfer gibt es dann auch eine standard endliche Überdeckung von $M$ durch Mengen aus $\mathcal{U}$. □

2.3.8. *Stetigkeit.*

**Theorem 2.29.** *Eine standard Funktion $f$, die in einer Umgebung eines standard Punktes $a \in \mathbb{R}$ definiert ist und reelle Werte hat, ist genau dann am Punkte $a \in \mathbb{R}$ stetig, wenn $x \simeq a$ impliziert, daß $f(x) \simeq f(a)$.*

*Beweis.* i) $f$ sei stetig, aber für ein $y$ gelte $y \approx a \wedge |f(y) - f(a)| \gg 0$. Es gibt also ein standard $\epsilon > 0$ so daß $|f(y) - f(a)| > \epsilon$. Wegen der Stetigkeit gibt es ein standard $\delta > 0$, so daß

$$\forall x \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)\,,$$

aber aus $y \approx a$ folgt doch $|y - a| < \delta$ und daher $|f(y) - f(a)| < \epsilon$. Der Widerspruch beweist die Behauptung.

ii) Es gelte $|x - a| \simeq 0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| \simeq 0$. Die Menge

$$M_\epsilon := \left\{ n : \forall x \left( |x - a| < \frac{1}{n'} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \right) \right\}$$

enthält für jedes standard $\epsilon > 0$ alle unbegrenzten $n$, also auch ein standard $n$. Also gibt es zu jedem standard $\epsilon > 0$ ein standard $\delta = \frac{1}{n'}$, so daß $\forall x \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$, was nach Entfernung der Relativierung auf standard $\epsilon, \delta$ mittels Transfer die herkömmliche Stetigkeitsdefinition ist. □

In der Zeit vor dem Infinitesimalkalkül waren die großen Tafelwerke mit den trigonometrischen Funktionen und den Logarithmen berechnet worden. Darin erscheinen die Funktionen als Listen von Werten zu einer endlichen Zahl von Variablenwerten. Wollte man Werte der Variablen benutzen, die nicht in der Tabelle aufgeführt waren, wurde linear interpoliert. **BST** erlaubt uns dieses Verfahren als theoretisch begründet zu verstehen, ohne dabei irgendwas über die spezielle Natur der Funktion vorauszusetzen, außer Stetigkeit.

Wir betrachten ein standard Intervall $[a, b]$, auf dem eine stetige Funktion $f$ mit reellen Werten definiert ist. Wir wählen eine infinitesimale Partition: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, d.h. alle $x_{i+1} - x_i$ sind infinitesimal. Man könnte z.B. nehmen $x_i := a + \frac{i}{N}(b - a)$ für $i = 0, \ldots, N$ mit $N$ nonstandard. Dann setzen wir $f_i := f(x_i)$, das liefert uns die Liste der Funktionswerte an den Stellen $x_i$. Für alle anderen Werte der Variablen interpolieren wir. Die so entstehende Funktion nennen wir $F$.

**Theorem 2.30.** *Die Funktion $F$ ist eine gute Approximation an $f$ in dem folgenden Sinne: für alle $x \in I$ gilt $f(x) \approx F(x)$.*

*Beweis.* Wir beweisen das indirekt. Es gebe ein $x$ für welches gilt $|F(x) - f(x)| > \epsilon$ für ein standard $\epsilon > 0$. Wenn es einen Index $i$ gibt mit $x_i = x$, dann gilt $F(x) = f_i = f(x_i)$, also $F(x) - f(x) = 0$. Das ist also ausgeschlossen. Es sei $i$ jener Index, für den gilt $x_i < x < x_{i+1}$. Es gilt dann $F(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_i + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1}$, also

$$F(x) - f(x_i) = \frac{x - x_i - (x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_i} f_i + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1} =$$

$$= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}(f_{i+1} - f_i) \approx 0.$$

Dieser Widerspruch zur Annahme beweist deren Falschheit. □

**Theorem 2.31.** *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine standard stetige Funktion auf einem abgeschlosenen, endlichen Intervall. Es gibt einen Punkt $x$ an dem die Funktion $f$ ihren größten Wert annimmt.*

*Beweis.* Angenommen es gibt einen Punkt $x$, an dem die Funktion maximalen Wert annimmt. Dann folgt aus Transfer, daß es einen standard Punkt $x$ gibt, an dem die Funktion maximalen Wert auf den standard Punkten annimmt. Dieser ist aber wieder nach Transfer maximal für alle Punkte von $I$. Es sei wieder

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

eine ausreichende Menge für $I$. Es sei $f_i = \max\{f_j : j \leq n\}$. Falls $x_i$ standard ist, haben wir das Maximum gefunden. Wenn nicht, dann ist $f(\,^\circ x_i) \approx f(x_i) \geq f(z)$ für alle standard $z$. □

**Theorem 2.32.** *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige standard Funktion. Wenn $f(a), f(b)$ veschiedenes Vorzeichen haben, dann gibt es einen Punkt $x$ im Intervall, an dem die Funktion verschwindet.*

*Beweis.* Aus Transfer folgt, daß der gesuchte Punkt standard ist, falls er existiert. Wie zuvor sei

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

eine ausreichende Menge für das Intervall und $f_i := f(x_i)$. Es sei $x_i$ der letzte Punkt, an dem $f_i$ das Vorzeichen von $f(a)$ hat. Da $f$ s-stetig ist, muß der Wert von $f$ an der Stelle $x_i$ infinitesimal sein, sonst wäre $x_i$ nicht der letzte Punkt seiner Art gewesen. Dann gilt aber $0 \approx f(x_i) \approx f(\,^\circ x_i) = 0$. □

**Definition 2.33.** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine standard Funktion. Sie heißt *s-differenzierbar*, wenn die Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ für $x \neq y$ aus einer beliebigen Monade selbst auch in einer begrenzten Monade liegen.

**Theorem 2.34.** *Eine standard Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist s-differenzierbar genau dann, wenn sie stetig differenzierbar im üblichen Sinne ist.*

*Beweis.* (i) die Funktion $f$ sei s-differenzierbar. Wir betrachten einen standard Punkt $x$. Für alle $y$ in der Monade von $x$ gilt dann, daß die Differenzenquotienten alle infinitesimalen Abstand von der reellen Zahl $r$ in der begrenzten Mondade haben, in denen die Quotienten alle liegen. Also gilt

$$M_\epsilon := \left\{ \delta \in \mathbb{R}_{>0} : x \neq y \wedge |x-y| < \delta \wedge \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - r \right| < \epsilon \right\}$$

enthält für alle standard $\epsilon > 0$ alle positiven infinitesimalen Zahlen, also auch eine standard Zahl $\delta > 0$. Das ist die herkömmliche Definition von Differenzierbarkeit am Punkte $x$. Wegen Transfer gilt das aber nun an allen Punkten.

Damit ist eine standard Funktion definiert, die jedem Punkt die Ableitung von $f$ an diesem Punkt zuordnet. Wie üblich bezeichnen wir die Funktion durch $f'$.

Es seien $x, y$ jetzt zwei Punkte aus der Monade eines Punktes $r$ in dem Intervall $[a,b]$. Außerdem sei $x > r > y$. Folgende Gleichung gilt:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(r)+f(r)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(r)}{x-r} \cdot \frac{x-r}{x-y} + \frac{f(r)-f(y)}{r-y} \cdot \frac{r-y}{x-y}.$$

Nach Voraussetzung können wir die Differenzenquotienten bis auf Infinitesimale ersetzen durch die Ableitungen ($\mu_i$ bezeichnen in der Formel Infinitesimale):

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = (f'(r)+\mu_1) \cdot \frac{x-r}{x-y} + (f'(r)+\mu_2) \cdot \frac{r-y}{x-y} =$$

$$= f'(r) + \mu_1 \cdot \frac{x-r}{x-y} + \mu_2 \cdot \frac{r-y}{x-y} \approx f'(r),$$

weil $\mu_1 \cdot \frac{x-r}{x-y} + \mu_2 \cdot \frac{r-y}{x-y} \approx 0$ wenn wir annehmen, daß $x > r > y$.

Jetzt sei $u$ ein Infinitesimales. Wir möchten zwei Werte von $f'$ innerhalb der Monade vergleichen.

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-u)}{u} + \delta(x,u),$$
$$f'(y) = \frac{f(y) - f(y-u)}{u} + \delta(y,u).$$

Über die Funktion $\delta$ wissen wir etwas: wenn $u$ gegen 0 geht, dann geht auch $\delta(z,u)$ gegen 0, weil die herkömmliche Definition des Differentialquotienten das aussagt, und diese Definition haben wir gerade bewiesen. Wir wählen $u$ so klein, daß es infinitesimal ist und so daß $|\delta(z,u)| < \mu$ für ein $\mu \approx 0$ und $z = x$ und $z = y$ gilt und außerdem $x$ und $x - u$ auf derselben Seite von $r$ liegen und das gleiche für $y$ und $y - u$. Dann erhalten wir folgendes:

$$f'(x) - f'(y) = \frac{f(x) - f(x-u)}{u} + \delta(x,u) - \left(\frac{f(y) - f(y-u)}{u} + \delta(y,u)\right) =$$
$$= \frac{f(x) - f(y)}{u} + \delta(x,u) - \left(\frac{f(x-u) - f(y-u)}{u} + \delta(y,u)\right) =$$
$$= \delta(x,u) - \delta(y,u) + \nu \approx 0.$$

(ii) Nun sei $f$ stetig differenzierbar auf dem Intervall. Wir nehmen an, daß $f$ aber nicht s-differenzierbar ist. Das heißt es gibt eine standard Zahl $r$ im Intervall, an der für ein Paar $x, y$ aus der Monade von $r$ mit $x \neq y$ der Differenzenquotient nicht ungefähr gleich $f'(r)$ ist. Das führt man aber ganz schnell auf einen Widerspruch (siehe 2.3.8) □

## Literatur


[1] K. Hrbáček, Axiomatic foundations for nonstandard analysis, *Fundamenta Mathematicae* 1978, 98, pp 1 –19

[2] K. Hrbáček, Nonstandard set theory, *Amer. Math. Monthly*, 1979, 86, pp 659 – 677

[3] V. Kanovei und M. Reeken, *Nonstandard Analysis, Axiomatically*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004

[4] W.A.J. Luxemburg, *Non-standard Analysis*, Lecture Notes, CalTech, Pasadena 1962

[5] E. Nelson, Internal set theory; a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* 1977, 83, 6, pp 1165 –1198

[6] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North Holland, Amsterdam 1966

[7] P. Vopěnka, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979

[8] P. Vopěnka and P. Hájek, *The theory of semisets*, North-Holland, Amsterdam, 1972

[F] A. Fraenkel, *Einführung in die Mengenlehre*, 3. Aufl., Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1928

[G] Kurt Gödel, *Collected Works*, Ed. S. Feferman et al., Oxford University Press 1986

[R] *Selected Papers of Abraham Robinson*, Volume 2, Ed. W.A.J. Luxemburg, S. Körner, North-Holland, Amsterdam, 1979

[S] Thoralf Skolem, *Selected Works in Logic*, Ed. by J.E.Fenstad, Oslo: Universitetsforlaget 1970, pp. 345 – 354

[EDM] *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge 1987