C'EST UNE FAÇON DE PARLER (LEIBNIZ)

MICHAEL REEKEN

Ein ungewohnter Blick auf das Mengenuniversum

Erster Teil

1. Ein Beispiel

Das folgende Beispiel ist gewählt, weil es in prägnanter Weise aufzeigt, worin die Wirkung der zugrundegelegten nonstandard Axiomatik liegt.

1.1. **Seil über ein Hindernis.** Wir untersuchen folgendes Problem: gegeben eine beschränkte Funktion f auf einem Intervall $[c, d]$, gesucht eine Kurve kürzester Länge die zwischen zwei gegebenen Punkten (a, a') und (b, b') als Endpunkten verläuft und mit dem (durch f beschriebenen) Hindernis $H := \{(x, y) : x \in [c, d] \wedge y < f(x)\}$ keine Punkte gemeinsam hat. Wir nehmen (vereinfachend) an, daß $a < c$ und $d < b$ ist. Die Kurve nehmen wir als durch den Graphen einer Funktion g darstellbar an, das heißt $g(a) = a'$, $g(b) = b'$ und $f(x) \leq g(x)$.

Von der Zulässigkeit der letzten etwas willkürlich erscheinenden Einschränkung kann man sich leicht überzeugen: jede Kurve, die nicht als Graph über der x-Achse darstellbar ist, aber die genannten anderen Einschränkungen erfüllt, ließe sich verkürzen, ohne die Einschränkungen zu verletzen. Keine solche Kurve kann also die gesuchte Kurve kleinster Länge sein.

Zwecks späterer Referenz wollen wir mit $(*)$ die genannten Bedingungen für g bezeichnen:

$$(*) \quad g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ rektifizierbar}, \ g(a) = a', \ g(b) = b', \ f(x) \leq g(x).$$

Der Charme dieses analytischen Problems liegt darin, daß es die mathematische Formulierung eines „*real world phenomenon*" ist: ein über ein Hindernis gespanntes Seil. Alternativ kann man ein über die Koffer auf dem Gepäckträger eines Autos gespanntes Gummiband betrachten. Da wir das Phänomen erleben, haben wir auch eine starke Intuition dafür, die uns sagt, daß es eine eindeutig bestimmte Kurve kürzester Länge über das Hindernis gibt. Es ist eigentlich zu erwarten, daß diese Intuition in einfacher Weise aus geometrischen Überlegungen zu begründen ist.

1.2. **Die klassische Beschreibung.** Darunter verstehen wir hier die Beschreibung im Rahmen der Analysis, wie sie im 20. Jahrhundert vollendet worden ist. Das bedeutet bei vollständiger Formalisierung die Verwendung einer formalen Sprache erster Ordnung mit einem Axiomensystem. Der Bestimmtheit halber soll hier die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom (**ZFC**) zugrundegelegt werden. Ganz soweit wollen wir es aber an dieser Stelle nicht treiben, sondern den

Jargon verwenden, wie er in den Lehrbüchern über solche Themen üblich ist und uns darauf verlassen, daß die Übertragung dieses Jargons in die formale Sprache möglich ist.

Dabei stoßen wir unmittelbar auf eine Menge technisches Wissen, das verfügbar sein muß, um sinnvoll und konzis über die Dinge sprechen zu können. Eine *Kurve* durch die Endpunkte (a, a') und (b, b') ist eine *stetige* Funktion $k : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $k(0) = (a, a')$ und $k(1) = (b, b')$ (als Definitionsbereich kann statt $[0, 1]$ jedes abgeschlossene Interval gewählt werden). Aber das reicht nicht, denn hier ist von Kurven die Rede, die eine Länge besitzen und nicht jede Kurve hat eine Länge. Also handelt es sich bei k tatsächlich um eine *rektifizierbare* Kurve, ein besonderes Kapitel aus der Analysis und nicht ganz elementar.

Wir suchen also eine *rektifizierbare* Funktion g, die $(*)$ erfüllt, wobei wir durch die Einschränkung an die Natur der Kurve (ein Graph über der x-Achse) das Problem schon auf die skalare Funktion g reduziert haben (statt einer vektoriellen Funktion k).

Nun betreten wir das Gebiet der Funktionalanalysis. Die Gesamtheit der rektifizierbaren Funktionen g, die $(*)$ erfüllen, ist eine Untermenge S des (linearen) Raumes $\mathcal{R}$ aller rektifizierbaren Funktionen, die auf $[a, b]$ definiert sind. Jeder solchen Funktion h ist eine Länge $\lambda(h)$ zugeordnet. Es liegt also ein reellwertiges, nicht-negatives Funktional λ auf dem Raum der rektifizierbaren Funktionen vor: $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da λ nach unten beschränkt ist, besitzt λ auf der Menge S ein Infimum. Es ist also zu zeigen, daß das Funktional λ auf der Menge S einen kleinsten Wert annimmt. Wir erwarten intuitiv sogar, daß es genau eine Funktion in S gibt, bei der das Minimum aller Werte angenommen wird!

Für die weitere Behandlung wird Stetigkeit des Funktionales λ bezüglich einer geeigneten Topologie und eine ausreichende Art von Kompaktheit von S oder alternative, spezielle Eigenschaften des Funktionales auf S benötigt, um sicherzustellen, daß das unzweifelhaft existierende Infimum tatsächlich angenommen wird in S.

Das ist eine funktionalanalytische Darstellung des Problemes (manchmal als *soft analysis* bezeichnet). Die der sogenannten *hard analysis* verpflichteten Mathematiker würden diese Abstraktion vermeiden und mehr im Konkreten verbleiben. Im Vorgriff auf die spätere Argumentation will ich eine solche Art von Betrachtungsweise schildern.

Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ durch endlich viele Punkte $a = x_0 < c = x_1 < \cdots < x_n = d < x_{n+1} = b$ und ersetzen f durch die Einschränkung von f auf $\mathcal{U}$, die wir durch $f_{\mathcal{U}}$ bezeichnen, wobei $\mathcal{U}$ die eben eingeführte Unterteilung bezeichnet. Es ist mit einfachen geometrischen Argumenten leicht zu beweisen, daß wir eine eindeutig bestimmte Lösung $g_{\mathcal{U}}$ finden, die für das Hindernis $f_{\mathcal{U}}$ die Lösung des Problemes ist. Im nächsten Abschnitt führen wir das aus.

So weit so gut und sehr anschaulich und simpel. Aber nun muß gezeigt werden, daß bei unbegrenzter Verfeinerung beliebiger Unterteilungen $\mathcal{U}$ stets ein und dieselbe rektifizierbare Funktion als Grenzwert der Funktionen $g_{\mathcal{U}}$ erscheint, die genau die gesuchte Lösung des Problemes ist. Auch in diesem Falle stoßen wir auf technische Probleme, die nur für einen einschlägig ausgebildeten Experten unmittelbar angreifbar sind.

Es gibt noch andere Möglichkeiten der Analyse, die der *hard* oder *soft analysis* zuzurechnen sind, aber stets erscheint ein technisch anspruchsvoller Anteil. Es ist doch seltsam, daß ein intuitiv erfaßbares Problem, dessen Lösung evident erscheint, mathematisch von einem solchen Aufwand von technischem Wissen abzuhängen scheint. Dem Mathematiker mag das ja schmeicheln, intellektuell ist es höchst unbefriedigend und deutet auf eine Schwäche der mathematischen Methode selbst hin.

Ich möchte zeigen, wie mit einem nicht-extensionalen Begriff und seiner axiomatischen Fassung diese ganze schwierige Arbeit eliminiert werden kann. Dies ist zuerst in diesem Sinne von E. Nelson mit seiner *Internal Set Theory* vorgeschlagen worden, mittlerweile haben jedoch metamathematische Untersuchungen auf ein wesentlich besseres axiomatisches System geführt, dem eine informelle Begründung zugrundeliegt, die selbst schon die Erwartung der (relativen) Widerspruchsfreiheit nahelegt.

1.3. **Mathematik und Mengenlehre.** Die Mengentheorie wurde von CANTOR Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt und dann zu Anfang des 20. Jahrhunderts von ZERMELO und FRAENKEL axiomatisiert, um die Paradoxien auszuschließen (dabei sollten die Beiträge von SKOLEM nicht unterschlagen werden). Diese Theorie wird als **ZFC** bezeichnet (**Z**ermelo **F**raenkel set theory with **C**hoice, [F]). Als prädikatenlogische Theorie erster Stufe besitzt sie eine vollständige Formalisierung. Das heißt die Beweise können in einem logischen Kalkül vollzogen werden und sind damit frei von subjektiven Elementen, die in dem Gedankengang der argumentierenden Person verborgen sein könnten.

Man hat sich anfangs die Mathematik vorgestellt als in „natürlicher" Weise eingebettet in das Mengenuniversum, das als ein fest umrissener geistiger Bereich gedacht wurde. Danach sind alle mathematischen Objekte letztlich Mengen und alle mathematischen Strukturen sind Objekte aus dem Mengenuniversum, weil auch Relationen und Funktionen als Mengen aufgefaßt werden können. Eine mathematische Struktur ist in dieser Sichtweise ein Gebilde, das aus Grundbereichen, Abbildungen und Relationen darauf besteht. Dabei wird aber Wert darauf gelegt, daß die repräsentierenden Mengen eine intuitive Erklärung der betrachteten Struktur liefern. Das folgende Beispiel illustriert das.

Beispiel 1. *Die natürlichen Zahlen. Als Objektbereich wird die Menge der endlichen Ordinalzahlen gewählt. Die Relation $<$ wird durch die fundamentale Relation des Enthaltenseins dargestellt: $a < b$ genau dann, wenn $n_a \in n_b$ ist, wobei n_c die endliche Ordinalzahl bezeichnet, welche die (abstrakte) natürliche Zahl c darstellt. Die Nachfolgeroperation bei den natürlichen Zahlen wird dargestellt durch die mengentheoretische Nachfolgeroperation $x \mapsto x \cup \{x\}$. Damit erhält die abstrakte, axiomatisch in den Peano Axiomen fixierte Zahlvorstellung einen konkreten Sinn im Mengenuniversum.*

In der eben genannten Einstellung (der „Natürlichkeit") heißt das, daß die natürlichen Zahlen die endlichen Ordinalzahlen **sind**, nicht nur eine willkürliche Darstellung davon. Damit wird das ganze Mengenuniversum zu einer intuitiv fast alternativlosen Erweiterung der natürlichen Zahlen, wenn man an der „natürlichen Einstellung" festhält, die in der Prädikatenlogik erster Stufe formalisiert ist. Darin manifestiert sich die ursprüngliche Vorstellung von der Beziehung zwischen Mathematik und Mengenlehre. Die Mathematik läßt sich in „natürlicher" Weise im Mengenuniversum darstellen.

Es würde zu weit führen, diesen Begriff der Natürlichkeit genauer zu analysieren. Die Identifikation der endlichen Ordinalzahlen mit den natürlichen Zahlen ist jedenfalls eine „natürliche" Weise den Zahlbegriff im Mengenuniversum darzustellen. Gleiches gilt für die Analyse des Begriffs der reellen Zahl als Dedekind-Schnitt in den rationalen Zahlen. Es geht allerdings immer auch anders, aber nicht so natürlich oder so effizient, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 2. *Wir betrachten die kleinste Menge, welche abgeschlossen ist unter der Abbildung $x \mapsto \{x\}$ und die leere Menge $\varnothing$ enthält. In dieser Menge können wir die Struktur der natürlichen Zahlen interpretieren. 0 wird zu $\varnothing$, 1 zu $\{\varnothing\}$, 2 zu $\{\{\varnothing\}\}$, usw. Die genannte Abbildung repräsentiert die Nachfolgerabbildung bei den Zahlen. So hat Zermelo die Zahlen im Mengenuniversum gedacht. Die Relation $<$ mengentheoretisch darzustellen ist jedoch etwas kompliziert, obwohl der menschliche Betrachter natürlich sofort sieht, worauf es hinausläuft: $a < b$ genau dann, wenn die Anzahl der Klammerpaare in n_a kleiner ist als in n_b. Das Problem ist, die „Anzahl der Klammerpaare" in mengentheoretischer Sprache zu formulieren, einer Sprache, in der „Anzahl von Klammerpaaren" gar nicht auftritt.*

Im Laufe der modernen Entwicklung hat sich die strukturelle Sichtweise herausgebildet. Danach besteht Mathematik aus abstrakten Strukturen, die durch formale Sprachen erster Ordnung und Axiome in der jeweiligen Sprache charakterisiert werden. Die inhaltliche Interpretation dieser formalen (rein syntaktischen) Objekte geschieht dadurch, daß man im Mengenuniversum **irgendwelche Mengensysteme** ausfindig macht, in welchen die formale Sprache der Struktur auf eine (durch keine Natürlichkeitsforderungen eingeschränkte) Weise in der mengentheoretischen Sprache interpretiert werden kann, so daß die Axiome der Struktur im Mengenuniversum beweisbar sind.

Ein solches Mengensystem heißt dann *Modell* der Struktur und das Studium der formalen Strukturen mithilfe solcher Modelle ist Aufgabe der *Modelltheorie*. Dabei wird die Mengenlehre zum Werkzeugkasten des Modellbauers.

Wie die beiden Beispiele zeigen, kann man schon bei einer so elementaren Struktur wie der der natürlichen Zahlen verschiedene Modelle angeben, wobei beide einen Anspruch auf „Natürlichkeit" erheben können. Man kann aber in **ZFC** beweisen, daß die beiden Modelle der natürlichen Zahlen, die wir in den beiden Beispielen beschrieben haben, isomorph im Mengenuniversum sind. Man kann sogar beweisen, daß alle Modelle isomorph sind, wenn man verlangt, daß die in der Struktur implizite auftretende Enthaltensein-Relation durch $\in$ im Mengenuniversum repräsentiert wird (im Falle der Peano-Arithmetik zweiter Stufe tritt sie im Induktionsaxiom auf, während für die Peano-Arithmetik erster Stufe erscheint sie indirekt, weil dort von Formeln die Rede ist, welche gemäß den Separationsaxiomen Untermengen von $\mathbb{N}$ erzeugen). Man spricht deshalb auch von standard Modellen, wobei standard nur ein Fachausdruck für das eben verwendete „natürlich" ist.

Nachdem Skolem 1933 als erster ein nonstandard (unnatürliches) Modell der Peano Arithmetik aufgezeigt hat [S], hat Robinson eine mengentheoretische Methode entwickelt [6], mit der man aus einem beliebigen (insbesondere einem natürlichen) Modell nichtisomorphe, unnatürliche Modelle erzeugen kann. Die Modelltheorie ist ein durchaus seriöses Geschäft, aber es ist ein anderer Blick auf die Mathematik, als der, welchen ich in diesen Vorträgen einnehmen möchte. Die Modelltheorie liefert nicht automatisch eine erkenntnistheoretisch befriedigende Erklärung für eine mathematische Struktur. Das ist auch nicht ihr Ziel.

Es gibt auch ganz pragmatische Argumente gegen die modelltheoretische Sichtweise: das Auftreten von freien „Konstruktionsparametern" in den nonstandard Modellen, was dazu führt, daß grundlegende mathematische Strukturen in unendlich vielen nonstandard Varianten offeriert werden. Ein in dieser Richtung noch weiter gehendes Argument wird die in dieser Sichtweise akzeptierte Zulassung von „unnatürlichen Interpretationen" der $\in$-Relation kritisieren.

Die nonstandard Modelle (der Nonstandard Analysis) werden vermutlich deshalb in der weiteren mathematischen Gemeinde mehrheitlich immer noch als das gesehen, was schon GÖDEL 1973 kritisch angemerkt hat, nämlich als *„fad of mathematical logicians"*, eine Sichtweise, gegen die er sich mit starken Worten wandte[1]. Dieser Fehleinschätzung kann man nur begegnen, wenn man diese Beliebigkeit in Hinblick auf die nonstandard Modelle eliminiert, indem man die charakteristischen Züge der nonstandard Modelle in der Mengenlehre selbst aufzeigt, so daß die natürlichen Modelle selbst schon das Phänomen präsentieren. Dann nämlich wird das zu einem intrinsischen Aspekt, dem man eine ganz andere als die modelltheoretische Interpretation geben kann. Das ist die Generallinie, die in diesen Vorträgen verfolgt wird.

Die hier vertretenen Ansichten in Hinblick auf Grundsatzfragen sind keineswegs neu und originell, sie sind vielmehr das Ergebnis einer 1983 begonnenen Beschäftigung mit diesem Thema. Im Literaturverzeichnis sind einige der wichtigsten Quellen genannt. Mein russischer Kollege V. KANOVEI und ich haben uns seit dem Beginn der 90er Jahre mit der axiomatischen Begründung der Nonstandard Mathematik befaßt und unsere metamathematischen Untersuchungen sind in [3] zusammengefaßt.

1.4. **Nonstandard Mengenlehre.** Auf den ersten Blick bietet sich dem Betrachter im Gegensatz zur Theorie **ZFC** eine Fülle von unterschiedlichen axiomatischen nonstandard Mengenlehren. In diesem Sinne ist das axiomatische Programm ein

---

[1] GÖDEL machte die folgende Bemerkung 1973 anläßlich eines Vortrages von ROBINSON am ASC in Princeton (siehe Band II von [G], sie wurde mit GÖDEL's Erlaubnis in der Ausgabe von 1974 von ROBINSON's Buch *Non-standard Analysis* abgedruckt): *I would like to point out a fact that was not explicitly mentioned by Professor Robinson, but seems quite important to me; namely that non-standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result; and it is true in an even higher degree in other cases. This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of non-standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather, there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future. One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers, etc. But the next quite natural step after the reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted. I think in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after the invention of the differential calculus. I am inclined to believe that this oddity has something to do with another oddity relating to the same span of time, namely the fact that such problems as Fermat's, which can be written down in ten symbols of elementary arithmetic, are still unsolved 300 years after they have been posed. Perhaps the omission mentioned is largely responsible for the fact that, compared to the enormous development of abstract mathematics, the solution of concrete numerical problems was left far behind.*

Fehlschlag, wenn man die Beliebigkeit im Auge hat, die bei der Modelltheorie unvermeidlich ist. Diese manifestiert sich nun in der Axiomatik selbst. Allerdings erweist sich eine bestimmte unter diesen Theorien als metamathematisch vor allen anderen ausgezeichnet. Sie ist auf eine ganz besondere Weise mit **ZFC** verknüpft und in ihr manifestiert sich die nonstandard Charakteristik als ohne Willkür in **ZFC** selbst verankert. Diese Theorie heißt *Beschränkte Mengenlehre* (**BST**; **B**ounded **S**et **T**heory) [3].

1.4.1. *Einige allgemeine Bemerkungen.* In vielen axiomatischen nonstandard Mengenlehren erfolgt die Erweiterung der Theorie auf die gleiche Weise: durch Einführung eines (syntaktisch) einstelligen Prädikates „standard", symbolisch st, das durch zusätzliche Axiome mit dem Rest der Theorie verknüpft wird. Außerdem muß man unterscheiden zwischen den *internen* Theorien und den *externen*.

Die internen Theorien zeichnen sich dadurch aus, daß die Änderungen des geistigen Bildes, das wir in unserer Vorstellung vornehmen müssen, minimal sind, während bei den externen Theorien substantielle Änderungen nötig sind.

Das besondere an dem Prädikat st in den internen Theorien ist, daß es **nicht-extensional** ist! Das heißt, es separiert aus einer gegebenen Menge keine Untermenge aus. Das bedeutet aus der Warte der Modelltheorie, daß „natürliche" Modelle für eine solche axiomatische Theorie ausgeschlossen sind[2]. Wie ich später ausführen werde, kann man im Fall von **BST** argumentieren, daß man nur ein nichtextensionales Merkmal von Mengen in der Theorie **ZFC** in den Kalkül eingefügt hat.

Die Mengenlehre wird häufig als *extensionale* Theorie bezeichnet, weil ihre Axiomatik so gebaut ist, daß ihre Intensionen, d.h. der Sinngehalt der Formeln mit einer freien Variablen, durch ihre Extensionen innerhalb jeder vorgegebenen Menge dargestellt sind. Das wird durch das Axiomenschema der Separation erreicht: zu jeder Formel $\phi(x)$ mit einer freien Variablen und jeder gegebenen Menge M gibt es eine Untermenge $N \subseteq M$, die aus genau allen jenen Elementen von M besteht, für welche $\phi(x)$ zutrifft. Das führt zu jener „Litanei", die man in mathematischen Schriften so häufig finden kann: „Die Menge aller x, so daß ... gilt."

Da die Mengenlehre von unendlichen Mengen spricht, ist dieser Zug der Theorie ganz fundamental: eine unendliche Menge kann nicht durch Auflistung ihrer Elemente, also extensional bestimmt werden, sondern nur durch die Angabe einer den Elementen und nur diesen gemeinsamen Eigenschaft. Andererseits haben wir eine intuitive Vorstellung von „Mengen", die uns eine Fülle von Eigenschaften suggeriert, die mit dem logischen Begriff der Extension einer Eigenschaft nicht notwendig verbunden sind.

1.4.2. *Das Prädikat „standard".* Um nun ein zusätzliches, nicht-extensionales Merkmal von Mengen in der Theorie unterzubringen, wird das Schema der Separation in der erweiterten Theorie fallengelassen. (Das ist zuerst 1977 von E. Nelson bei seiner Theorie IST [5] gemacht worden.) Aus Sicht der ursprünglichen Einstellung zur axiomatisierten Mengenlehre, wie sie Zermelo und die Mengentheoretiker seiner Zeit pflegten, ein Unding, denn dann gibt es Intensionen (in der st-$\in$-Sprache

[2]Eine nonstandard Mengentheorie muß – als formale Theorie aufgefaßt – Modelle in der Mengenwelt besitzen, sofern diese Theorie relativ konsistent ist bezüglich der Mengenlehre. Diese Modelle können aber das Enthaltensein der nonstandard Theorie nicht durch jene Relation $\in$ darstellen, die ihrem Mengenuniversum zugrundeliegt.

ausgedrückt), die (in ihrer Einschränkung auf Mengen) nicht durch Mengen objektivierbar sind.

Damit wird eine natürliche Tarski-Interpretation dieses logischen Kalküls verhindert und der dennoch sehr erfolgreiche Kalkül gewinnt eine Art von mystischer Faszination, einen Hauch von Zauberei, dem jedoch in der lokalen, modelltheoretischen Version harte technische Arbeit vorausgeht.

Was ist nun der Sinn dieses Prädikates? Das ist eine schwierige Frage, die ich an dieser Stelle etwas vage angehen möchte. Die Mengenlehre ist durch **ZFC** so axiomatisiert, daß sich das Mengenuniversum hierarchisch aufbaut in der von-Neumann-Hierarchie, die längs der Ordinalzahlen fortschreitet. Dabei treten immer wieder zwei infinitäre Operationen auf: die Vereinigung und die Potenzmenge. Beide besitzen eine klare Intension, aber eine durchaus unklare Extension, die einfach nur postuliert wird.

Die erste „Schwachstelle" ist daher ω, die erste unendliche Ordinalzahl. Sie ist die Vereinigung aller endlichen Ordinalzahlen. Wenn wir an die Menge der natürlichen Zahlen denken, denken wir implizit an $0, 1, 2, 3, \ldots$, wobei die drei Punkte auf das fortgesetzte Weiterzählen hinweisen. Dennoch entsteht durch Zählen niemals die aktual unendliche Menge der natürlichen Zahlen, im Gegenteil der abgezählte Abschnitt bleibt während des ewig andauernden Zählens eigentlich immer gleich unvollständig.

Wir haben aber in der Mengenlehre eine **intensionale Charakterisierung** der Menge der natürlichen Zahlen: die kleinste Menge, die 0 (die leere Menge) enthält und abgeschlossen ist unter der Nachfolgeroperation. In der einen Sichtweise ist diese Menge also „unüberschaubar", in der anderen ist sie intensional in Bezug auf die vorausgesetzte Gesamtheit aller in der von-Neumann-Hierarchie enthaltenen Mengen fixiert, d.h. es gibt eine Beschreibung (die eben genannte) in der Sprache der Mengenlehre und die Theorie beweist, daß es eine und nur eine solche Menge gibt.

In der üblichen Sichtweise des Mengenuniversums gehen wir davon aus, daß alle endlichen Mengen – im Gegensatz zu den unendlichen – „überschaubar" sind, das heißt wir meinen, daß wir sie nicht nur intensional bestimmen können, sondern auch extensional. Das ist aber eine nur psychologisch zu erklärende Illusion.

Wir haben tatsächlich nur allgemeine Anweisungen zur Durchführung von Rechenalgorithmen, aber etwa von einer Zahlenmenge mit $2413^{17954^{1764}}$ Elementen zu behaupten, man könne sie „überschauen", bzw. auch nur diese Rechnung wirklich durchführen, ist absurd und durch nichts zu rechtfertigen. In diesem Sinne ist zwischen den Abstraktionen der Mengenlehre, ihren ohne Ende wachsenden Kardinalitäten und dieser „natürlichen Zahl" kaum ein Unterschied. VOPĚNKA hat auf das Beispiel der Darwinschen Theorie hingewiesen: der Mensch stammt von bestimmten prähominiden Affenarten ab; die Entwicklungslinie ist endlich, die Nachkommen von Prähominiden sind Prähominiden, die Eltern von Menschen sind Menschen. Wie paßt das zusammen? Die gängige Antwort ist, daß das eben keine der Mathematik zugängliche Situation sei.

Die philosophisch motivierte (im Gegensatz zur modelltheoretisch begründeten) Nonstandard Analysis versucht, diesen Gedanken einer Unterscheidung zwischen überschaubaren und unüberschaubaren Mengen zu entwickeln und auf ein rationales Fundament zu stellen. Der erste Versuch in diese Richtung stammt von Vopěnka mit seiner *Alternative Set Theory* (**AST**) [7], in der das Mengenuniversum nur aus hereditär endlichen Mengen besteht, die aber in „überschaubare" und „unüberschaubare" Mengen zerfallen. Diese Theorie erweist sich aber als sehr viel schwächer als die herkömmliche Mathematik. Erfahrungsgemäß etwas, das Mathematiker in ihrer Mehrheit nicht akzeptieren.

Man kann aber durchaus argumentieren, daß die unendlichen Mengen eine Art von Fata Morgana sind, ein Trugbild am Horizont des unbegrenzten Fortschreitens. Tatsächlich verschiebt sich beim Fortschreiten der Horizont, bis zu dem wir meinen sehen zu können, immer weiter, ohne daß man ihn je erreicht. Die Aussagen, die man aus den Trugbildern herleitet, sind Idealisierungen der Verhältnisse in der nur potentiell unendlichen, aber „unüberschaubar" großen und vielfältigen Welt der natürlichen Zahlen und der aus ihnen gebildeten **endlichen** Mengen.

Hier wird jedoch ein anderer Gedanke vertreten: die „Trugbilder" der unendlichen Mengen werden als nützliche und im Denken angelegte Abstraktionen akzeptiert, zumal jene, die fixiert sind (eine $\in$-Beschreibung besitzen), aber es wird – ähnlich wie bei Vopěnka – festgelegt, daß es bei den endlichen Mengen Unterschiede zwischen „überschaubaren" und „unüberschaubaren" Mengen gibt, wobei die in der Mengenlehre auftretenden unendlichen Mengen „Abstraktionen" von endlichen aber unüberschaubaren Mengen sind.

Die in der normalen Einstellung zur Mengenlehre vorausgesetzte Korrespondenz zwischen den beiden Unterscheidungen „endlich – unendlich" (eine mengentheoretische Unterscheidung) und „überschaubar – unüberschaubar" (eine intuitive Unterscheidung) wird durch Axiome aufgehoben, die ausdrücken, daß die sogenannten „standard" Elemente jeder **unendlichen** standard Menge in einer zwar „nichtstandard", aber **endlichen** Menge enthalten sind. Diese endlichen Mengen bestimmen die ursprüngliche, unendliche Menge eindeutig. Die Mengen, welche „standard" und endlich sind, bestehen aus einer standard Anzahl von standard Mengen. Die intuitive Vorstellung von „überschaubar" wird also formalisiert durch endlich und „standard". Diese Erweiterung des Ansatzes von Vopěnka stellt sich als in einem bestimmten, präzisen Sinne als intrinsisch in der herkömmlichen Mengenlehre angelegt heraus und erhält die klassische Mathematik in vollem Umfange.

An dieser Stelle will ich es damit bewenden lassen, nur eine operative Beschreibung des Kalküls zu geben, später wird der Sinn dieser Axiomatik ausführlicher besprochen werden.

> Alle Axiome von ZFC (in $\in$-Sprache) bleiben erhalten.

Die folgenden Axiome berühren das zusätzliche Prädikat st.

> Das Axiomenschema *Transfer* sagt, daß jede $\in$-Aussage der Mengenlehre den gleichen Wahrheitswert hat, wie die gleiche Aussage relativiert auf standard Mengen, vorausgesetzt in der Aussage erscheinen keine nonstandard Parameter.

Beispiel 3. *Keine endliche Untermenge einer unendlichen Menge schöpft diese aus. Anwendung von Transfer: Keine endliche, standard Untermenge einer unendlichen, standard Menge schöpft diese aus.*

> Das Axiomenschema *Standardisierung* sagt, daß jede st-$\in$-Aussage $\phi(x)$ mit einer freien Variablen und beliebigen Parametern zu jeder Menge M eine standard Menge festlegt, deren standard Elemente genau diejenigen standard Elemente aus der Menge M sind, die $\phi(x)$ erfüllen. Man schreibt dafür in Anlehnung an die Symbolik in

der Mengenlehre:

$$^{\mathrm{s}}M = {}^{\mathrm{s}}\{x \in M : \phi(x)\}\,.$$

Es gibt jedoch **keine** Menge, die aus allen Elementen von M besteht, die $\phi(x)$ erfüllen! Daher ist $\{x \in M : \phi(x)\}$ i.a. keine Menge, sondern nur eine Umschreibung der Formel ϕ.

Beispiel 4. *Die Standardisierung der standard endlichen Ordinalzahlen* $^{\mathrm{s}}\{x \in \omega : \mathrm{st}(x)\}$ *liefert also eine standard Menge, deren standard Elemente genau die standard endlichen Ordinalzahlen sind. Wegen Transfer und Extensionalität kann das nur die Menge aller endlichen Ordinalzahlen sein.*

Zuletzt kommt noch ein einzelnes Axiom dazu, *Finitisierbarkeit* genannt, welches sagt, daß es zu jeder Menge M eine Untermenge $N \subseteq M$ gibt, die endlich ist und alle standard Elemente von M enthält.

1.5. Nonstandard Behandlung des Beispiels.

1.5.1. *Die finite Lösung des Problems.* In den folgenden Überlegungen beruht alles auf elementarer Geometrie und wir führen das wesentliche Argument ohne Beweis an.

Proposition 1. *Das Geradensegment zwischen zwei verschiedenen Punkten des* $\mathbb{R}^2$ *hat die kleinste Länge unter allen Polygonzügen, die die beiden genannten Punkte verbinden.*

Unter einem Polygonzug verstehen wir dabei eine endliche Folge von Geradensegmenten $A_iB_i\, i = 0, \ldots, n$, wobei $A_{i+1} = B_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Als Parametrisierungen verwenden wir ausschließlich solche, die aus der Parametrisierung durch die Bogenlänge durch Parametertransformationen der Form $s = \alpha t + \beta$ entstehen. Deshalb sind die zugelassenen Parametrisierungen stetige stückweise lineare (abgekürzt: ssl) Funktionen.

Da es hier nur um Polygonzüge in spezieller Lage geht, solche die sich über der x-Achse des natürlichen Koordinatensystems als Graphen darstellen lassen (genauer gesagt als Graphen einer ssl Funktion), wird nur von ssl Funktionen zu sprechen sein. Die Länge des Graphen einer ssl Funktion f wird der Einfachheit als *Länge* L_f *der Funktion* f bezeichnet werden (richtig wäre: die Länge des Graphen der Funktion f). Wir werden auch sonst verbal nicht zwischen der Funktion und ihrem Graphen unterscheiden, der Sinn wird sich jeweils aus dem Zusammenhang ergeben.

Damit können wir das Problem der kürzesten Kurve über ein Hindernis **von endlich vielen** Halbgeraden in knapper und durchsichtiger Weise lösen. Wir führen folgende Notation ein:

$$a = x_0 < c = x_1 < \cdots < x_n = d < x_{n+1} = b$$

und die Partition des Intervalles $[a, b]$ soll durch $\mathcal{U} = \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$ bezeichnet werden. Nur zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir die Funktion f in den Endpunkten: $f(a) = a'$ und $f(b) = b'$. Wir können uns auf die Menge der stetigen, stückweise linearen (abgekürzt: ssl) Funktionen einschränken, weil ja nur an endlich vielen Punkten eine vertikale Halbgerade als Hindernis erscheint. Zwischen diesen Stellen wird die beste Wahl notwendigerweise ein Geradensegment sein.

Wir wählen unter allen Segmenten von (a, a') zu den Punkten $(x_i, f(x_i)), i > 0$ (da ist jetzt als letzter der Punkt (b, b') enthalten) jenes, das die größte Steigung besitzt sowie den zugehörigen Punkt $(x_j, f(x_j))$, der am weitesten rechts liegt, falls mehrere Punkte auf der entsprechenden Geraden liegen. Es sei $k_1 := j$. Aus der Konstruktion ergibt sich, daß $x_1 \leq x_{k_1} \leq x_{n+1}$. Wenn $x_{k_1} = b$, dann ist das Segment von (a, a') nach (b, b') die gesuchte Kurve, andernfalls beginnen wir die gleiche Konstruktion wie eben mit $(x_{k_1}, f(x_{k_1}))$ anstelle von (a, a').

Damit ist eine induktive Prozedur definiert, deren allgemeinen Schritt wir festhalten: der Wert x_{k_m} sei schon gefunden. Dann wählen wir das Maximum unter allen Steigungen $\frac{f(x_i)-f(x_{k_m})}{x_i-x_{k_m}}$ für alle $i > x_{k_m}$. Der am weitesten rechts liegende Punkt x_j zu diesem maximalen Steigungswert ist der Punkt $x_{k_{m+1}} \leq b = x_{n+1}$. Dieser Steigungswert ist nach oben beschränkt durch den vorangehenden Wert $\frac{f(x_{k_m})-f(x_{k_{m-1}})}{x_{k_m}-x_{k_{m-1}}} \geq \frac{f(x_{k_m+1})-f(x_{k_m})}{x_{k_{m+1}}-x_{k_m}}$, weil sonst bei der Konstruktion des x_{k_m} bereits der Punkt $x_{k_{m+1}}$ sich ergeben hätte. Also gilt für alle $k_m < n+1$:

$$(**) \qquad \frac{f(x_{k_m}) - f(x_{k_{m-1}})}{x_{k_m} - x_{k_{m-1}}} \geq \frac{f(x_{k_m+1}) - f(x_{k_m})}{x_{k_{m+1}} - x_{k_m}}.$$

Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten sobald ein $x_{k_M} = b$ ist. Dann gilt natürlich $x_{k_{M-1}} \leq d$ und $\frac{f(x_{k_{M-1}})-f(x_{k_{M-1}})}{x_{k_{M-1}}-x_{k_{M-2}}} \geq \frac{b'-f(x_{k_{M-1}})}{b-x_{k_{M-1}}}$. Also gilt für alle $m < M$:

$$(***) \quad \frac{f(x_{k_1}) - a'}{x_{k_1} - a} \geq \frac{f(x_{k_m+1}) - f(x_{k_m})}{x_{k_{m+1}} - x_{k_m}} \geq \frac{b' - f(x_{k_{M-1}})}{b - x_{k_{M-1}}}.$$

Die linke Ungleichung ergibt sich indem man die Kette der Abschätzungen $(**)$ bis nach ganz links zum ersten Term verfolgt. Die Rand- und Hindernisbedingungen für diese Prozedur werden wir durch $(*_{\mathcal{U}})$ bezeichnen.

Offensichtlich endet also diese induktive Prozedur nach endlich vielen Schritten mit einer ssl Funktion $G_{\mathcal{U}}$. Die Punkte $(x_i, f(x_i))$, die auf dem Graphen von $G_{\mathcal{U}}$ liegen, sollen *Stützpunkte des Hindernisses* für $G_{\mathcal{U}}$ heißen. Das sind die Punkte, wo das Hindernis die Kurve berührt. $G_{\mathcal{U}}$ ist die gesuchte kürzeste Kurve über das Hindernis $H_{\mathcal{U}}$, denn sie vermeidet das Hindernis, ist aber nach Konstruktion kürzer als jede andere Kurve, die das Hindernis meidet. Das wird im Folgenden bewiesen.

Nachfolgend beweisen wir einige simple Aussagen über ssl Funktionen, die $(*_{\mathcal{U}})$ erfüllen.

Lemma 1. *(Ersetzungslemma) Es sei g eine ssl Funktion, die $(*_{\mathcal{U}})$ erfüllt. Wenn jede davon verschiedene ssl Funktion h, welche $(*_{\mathcal{U}})$ erfüllt und auf einem Intervall $I \subseteq [a, b]$ durch g ersetzt werden kann ($h = g$ auf den Endpunkten von I) und der Graph durch diese Ersetzung in seiner Länge verkürzt wird, dann hat g die kürzeste Länge unter allen ssl Funktionen, die $(*_{\mathcal{U}})$ erfüllen. g ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Da je zwei $(*_{\mathcal{U}})$ erfüllende ssl Funktionen immer ein Intervall besitzen, auf dem sie durcheinander ersetzt werden können (schlimmstenfalls der ganze Definitionsbereich), kann keine von g verschiedene, zulässige Funktion die mit der kleinsten Länge sein, da sie durch Ersetzen durch g verkürzt wird. Also ist g selbst die gesuchte Funktion mit der kleinsten Länge. Eine andere mit der gleichen kürzesten Länge kann es auch nicht geben, weil Ersetzung durch g wieder zur Verkürzung und damit zu einem Widerspruch führen würde. □

Lemma 2. *Gegeben eine konkave ssl Funktion g auf $[a,b]$. Der Graph jeder ssl Funktion $h \geq g$ hat mindestens die Länge des Graphen von g. Wenn die Längen der Graphen von g und h übereinstimmen, dann gilt $g = h$.*

Beweis. In den Stützpunkten $(y_i, g(y_i))$ der ssl Funktion g (die Punkte, welche die Geradensegmente begrenzen, aus denen der Graph besteht) errichten wir diejenigen Halbvertikalen auf die Geradensegmente von g links bzw. rechts von y_i, die oberhalb des Graphen von g verlaufen. Die beiden Halbvertikalen schließen einen Winkel ≥ 0 ein. Die Teile des Graphen von h, die in diesem Keil verlaufen, haben positive Länge, es sei denn der Graph von h hat mit beiden Halbvertiaklen nur den Punkt $(y_i, g(y_i))$ gemeinsam. Die Teile des Graphen von h, die zwischen zwei parallelen Halbvertikalen zu $(y_i, g(y_i))$ und $(y_{i+1}, g(y_{i+1}))$ verlaufen, haben Länge $\geq$ der Länge dieses Segmentes des Graphen von g. Also ist die Länge von h größer gleich der Länge von g und Gleichheit tritt nur ein, wenn $g = h$. □

Lemma 3. *Die Kurve $G_{\mathcal{U}}$ ist konkav .*

Beweis. Folgt aus der Tatsache, daß $G_{\mathcal{U}}$ ssl ist und die Steigungen aufeinanderfolgender Segmente gemäß $(**)$ von links nach rechts abnehmen. □

Lemma 4. *Die ssl Kurve $G_{\mathcal{U}}$ erfüllt die Bedingungen $(*_{\mathcal{U}})$ und ist kürzer als jede andere ssl Kurve, die diese Bedingungen erfüllt.*

Beweis. Angenommen eine ssl Funktion $h \neq G_{\mathcal{U}}$ ist gegeben, die $(*_{\mathcal{U}})$ erfüllt. Dann gibt es abgeschlossene Intervalle $I = [u, v]$ auf deren Randpunkten $G_{\mathcal{U}}$ und h übereinstimmen, aber im Inneren von I gilt $G_{\mathcal{U}} > h$ oder $G_{\mathcal{U}} < h$. Wenn I von zwei unmittelbar benachbarten Stützpunkten des Hindernisses für $G_{\mathcal{U}}$ eingeschlossen wird, dann ist $G_{\mathcal{U}} \restriction_I$ als Geradensegment auf jeden Fall kürzer als $h \restriction_I$. Wenn ein oder mehrere Stützpunkte des Hindernisses in I liegen, dann kann an diesen Punkten nur gelten $h > G_{\mathcal{U}}$ und der Graph von $G_{\mathcal{U}} \restriction_I$ ist gemäß Lemma 2 kürzer als der von $h \restriction_I$. Nach dem Lemma 1 ist daher $G_{\mathcal{U}}$ die eindeutig bestimmte Funktion mit kleinster Länge, die $(*_{\mathcal{U}})$ erfüllt. □

1.5.2. *Die nonstandard Lösung des Problems.* Das waren alles simple, im Grunde geometrische Tatsachen, die uns scheinbar unüberbrückbar weit weg von dem eigentlichen Problem lassen. Aber nun wählen wir eine Partition $\mathcal{U}$, die **ausreichend** ist, d.h. die alle standard Punkte des Intervalles $[c, d]$ enthält. Somit ergibt sich eine Funktion $G_{\mathcal{U}}$, die das Problem für das Hindernis $H_{\mathcal{U}}$ löst. Diese Funktion ist zwar in endlicher Weise und völlig intuitiv konzipiert, aber diese Konzeption geht von nichtstandard Ausgangsdaten aus und erhält so ein nichtstandard Objekt. Das Objekt ist zwar sehr gut vorstellbar, aber die Zahl der Partitionspunkte ist „unüberschaubar".

Wir benötigen eine Methode, die dieses Objekt mit einem standard Objekt in Verbindung bringt, d.h die endliche aber „unüberschaubare" Natur des Objektes durch eine herkömmliche mengentheoretische Beschreibung ersetzt. Das Mittel der Wahl ist der sogenannte *Standardschatten*.

Im folgenden wird Wert darauf gelegt, den Beweis möglichst präzise auszuführen, um den Eindruck zu vermeiden, daß dabei irgendwelche vage Argumente auftreten, die einen trügerischen Eindruck von Einfachheit erwecken.

Um den Gedankengang hier nicht unterbrechen zu müssen, werden die wesentlichen Punkte hier einfach genannt. Im folgenden Teil werden diese Ergebnisse in einem weiter gefaßten Rahmen dann abgeleitet.

Jede begrenzte Zahl, d.h. eine Zahl deren Absolutbetrag durch eine standard Zahl majorisiert wird, besitzt einen eindeutig bestimmten *Standardteil*, d.h. eine standard Zahl, die infinitesimalen Abstand von der begrenzten Zahl hat. Eine ssl, begrenzte Funktion f mit begrenzten Steigungen, die auf einem standard Intervall $[a, b]$ definiert ist, besitzt einen *Standardschatten* ${}^{(\circ)}f$ in dem Sinne, daß man an jeder standard Stelle x des Intervalles den Standardteil ${}^{\circ}f(x)$ des Wertes $f(x)$ zuordnet und die daraus eindeutig gemäß Standardisierung definierte Funktion ${}^{(\circ)}f$ gewinnt. An allen standard Stellen x gilt dann $f(x) \simeq {}^{(\circ)}f(x)$. Dieser Standardschatten der Funktion f ist eine stetige standard Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Wir vermerken, daß ${}^{\circ}f(x)$ etwas anderes bedeutet, als ${}^{(\circ)}f(x)$.

Wir bezeichnen nun durch g den Standardschatten der Funktion $G_{\mathcal{U}}$. Diese standard stetige Funktion ist die gesuchte Lösung des Problemes. Das weisen wir in mehreren Schritten nach. Davor benötigen wir noch ein externes Resultat über ssl Funktionen.

Lemma 5. *Gegeben ein nicht vertikales standard Geradensegment. Eine ssl Funktion, welche die beiden Endpunkte verbindet besitzt einen Standardschatten, wenn ihre Länge fast gleich der des Geradensegmentes ist und der Standardschatten hat dieses Segment als Graphen. Daher hat der Graph einer ssl Funktion, der die beiden Endpunkte verbindet und einen Punkt besitzt, der nicht nahe beim Segment liegt, eine Länge, die deutlich größer als die des Segmentes ist.*

Beweis. Da die Länge L_f begrenzt ist und die Endpunkte im Begrenzten liegen, kann kein Punkt des Graphen in seiner zweiten Komponente unbegrenzt sein. Es sei $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ die ssl Funktion, die das Geradensegment als Graphen hat.

Wenn an einer Stelle x der Abstand zwischen $(x, s(x))$ und $(x, f(x))$ nicht infinitesimal wäre, dann wäre nach Proposition 1 und dem Pythagoras die Kurve deutlich länger als das Geradensegment. Der Widerspruch zeigt, daß für alle x gilt $f(x) \approx s(x)$.

Schließlich folgt aus dem Pythagoras, daß für alle $x \approx y$ gelten muß $s(x) \approx s(y)$. Daraus folgt $f(x) \approx f(y)$. Also besitzt f einen Standardschatten. □

Lemma 6. *g ist konkav:*

Beweis. Wegen der Konkavheit von $G_{\mathcal{U}}$ gilt für alle Punkte $x, y \in [a, b]$ die Ungleichung $G_{\mathcal{U}}(tx + (1 - t)y) \geq tG_{\mathcal{U}}(x) + (1 - t)G_{\mathcal{U}}(y)$; daraus wird für alle standard Zahlen $x, y \in [a, b]$ und alle standard $t \in [0, 1]$ die Ungleichung $g(tx + (1 - t)y) \gtrsim tg(x) + (1 - t)g(y)$ weil an standard Werten der Variablen g infinitesimal nahe bei $G_{\mathcal{U}}$ ist; wenn zwei standard Zahlen aber in der Relation $\gtrsim$ stehen, dann stehen sie sogar in der Relation $\geq$, außerdem gilt diese Ungleichung dann gemäß Transfer sogar für alle $x, y \in [a, b]$ und $t \in [0, 1]$. □

Lemma 7. *g erfüllt $(*)$.*

Beweis. $G_{\mathcal{U}}$ erfüllt $(*_{\mathcal{U}})$. Für alle standard Punkte x gilt daher $G_{\mathcal{U}}(x) \geq f(x)$ und daher $g(x) = {}^{\circ}G_{\mathcal{U}}(x) \geq {}^{\circ}f(x) = f(x)$. Aber sowohl f als auch g sind standard Funktionen, also gilt $g(x) \geq f(x)$ für **alle** x. □

Nun müssen wir die Rektifizierbarkeit von g nachweisen. Dazu müssen wir diesen klassischen Begriff in externer Sprache beschreiben. Zuvor noch eine Notation. Beim Begriff der Rektifizierbarkeit einer Funktion f verlangt man außer Stetigkeit, daß für jedes in den Graphen von f eingeschriebene Polygon (eine ssl Funktion) die Länge des Polygons unterhalb einer festen Schranke bleibt. Die Partition des Definitionsintervalles sei wieder durch $\mathcal{P}$ bezeichnet. Wir schreiben $f_{\mathcal{P}}$ für das eingeschriebene Polygon. Wenn diese Zahlen beschränkt sind, haben sie ein Supremum, das *Länge der Kurve f* heißt:

$$L_f := \sup_{\mathcal{P}} L_{f_{\mathcal{P}}}.$$

Lemma 8. *Eine standard stetige Funktion ist rektifizierbar, wenn es eine ausreichende Partition gibt, deren eingeschriebenes Polygon begrenzte Länge hat. Der Standardteil dieser Länge ist die „Länge" der rektifizierbaren Kurve im klassischen Sinne. Jedes eingeschriebene Polygon zu einer ausreichenden Partition und einer standard rektifizierbaren Funktion hat begrenzte Länge, deren Standardwert mit der Länge der Kurve übereinstimmt.*

Beweis. Sei f rektifizierbar und standard. Dann sind nicht nur die Längen der eingeschriebenen Polygone zu beliebigen endlichen Partitionen beschränkt, sondern wegen Transfer gilt das auch für alle standard endlichen Partitionen, deren eingeschriebene Polygone die Länge L_f als Supremum haben. Sei $\mathcal{U}$ eine ausreichende Partition und sei $L_{f_{\mathcal{U}}}$ die Länge des eingeschriebenen Polygones. Da bei Verfeinerung einer Partition die Länge des eingeschriebenen Polygones zunimmt, gilt $L_{f_{\mathcal{P}}} \leq L_{f_{\mathcal{U}}} \leq L_f$, denn eine ausreichende Partition ist Verfeinerung jeder standard Partition $\mathcal{P}$. Zu jedem standard $\epsilon > 0$ gibt es eine standard Partition, so daß $L_f - L_{f_{\mathcal{P}}} < \epsilon$, woraus folgt, daß für alle standard $\epsilon > 0$ die Ungleichung $L_f - L_{f_{\mathcal{U}}} < \epsilon$ gilt, was gleichbedeutend ist mit $L_f \approx L_{f_{\mathcal{U}}}$ bzw. $L_f = {}^\circ L_{f_{\mathcal{U}}}$.

Umgekehrt sei nun f eine standard, stetige Funktion, und es gebe eine ausreichende Partition $\mathcal{U}$ mit begrenzter Länge $L_{f_{\mathcal{U}}}$ des eingeschriebenen Polygones. Mit dem Verfeinerungsargument von eben heißt das doch, daß $L_{f_{\mathcal{P}}} \leq L_{f_{\mathcal{U}}}$. Also führen alle standard Partitionen zu Längen, die unterhalb einer begrenzten Zahl liegen, also ist die Kurve rektifizierbar mit einer Länge L_f und nach dem vorangehenden liegt $L_{f_{\mathcal{U}}}$ zwischen den Längen zu den standard Partitionen und der Länge L_f, und da die Erstgenannten näher als jedes standard ϵ an L_f heranrücken, gilt $L_f = {}^\circ L_{f_{\mathcal{U}}}$. □

An dieser Stelle ist es angebracht, einige weiterführende Bemerkungen zu machen. Jede ssl Funktion ist *per definitionem* rektifizierbar, ihre Länge ist die Summe der Längen von endlich vielen Segmenten. Aber nicht jede ssl Funktion hat eine begrenzte Länge, selbst wenn die Endpunkte eine begrenzte Entfernung voneinander haben. Es sei N eine nonstandard Zahl, dann hat die ssl Funktion, die bei 0 den Wert 0 hat und bei $\frac{1}{2N}$ den Wert 1 und bei $\frac{1}{N}$ wieder den Wert 0 und dann periodisch wiederholt, eine Länge größer als $2N$.

Obwohl also jede ssl Funktion rektifizierbar ist, bedeutet das nicht, daß die Funktion einen Standardschatten hat, denn ihre Länge kann unbegrenzt sein, selbst bei Endpunkten, die begrenzte Entfernung voneinander haben. Darüberhinaus kann eine ssl Funktion, die einen Standardschatten besitzt, der das Segment zwischen den Endpunkten als Graphen hat, eine Länge haben, welche nicht der Länge des Segmentes fast gleich ist, sondern kann deutlich größer sein. Als Beispiel nehmen wir die gleiche Situation wie eben, aber ordnen dem Variablenwert $\frac{1}{2N}$ den Wert $\frac{1}{2N}$ zu und setzen periodisch fort, dann ist die Länge dieser Kurve $N \cdot 2\sqrt{2}\frac{1}{2N} = \sqrt{2} > 1$. Der Standardschatten dieser Funktion ist offensichtlich die Nullfunktion mit der Länge 1.

In dieser Bemerkung verbergen sich Einsichten, die in der klassischen Betrachtungsweise zu rektifizierbaren Funktionen nicht so offensichtlich zutage treten.

Lemma 9. *g ist rektifizierbar und $L_g \approx L_{g_\mathcal{U}} \approx L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{U}}$.*

Beweis. Es ist zu beachten, daß $G_\mathcal{U}$ nicht das eingeschriebene Polygon einer Funktion G ist, sondern direkt als ssl Funktion definiert wurde. Aber natürlich ist $(G_\mathcal{U})_\mathcal{U} = G_\mathcal{U}$, weil $\mathcal{U}$ die x-Koordinaten der Stützpunkte der ssl Funktion $G_\mathcal{U}$ sind. Wir müssen zuerst nachweisen, daß die ssl Funktion $G_\mathcal{U}$ begrenzte Länge hat. Das machen wir mit einem sehr primitiven Argument, da es auf die Güte der Abschätzung überhaupt nicht ankommt. Die Abstände zwischen unmittelbar benachbarten Punkten der Partition sollen δ_i heißen. Der absolut größte Winkel α mit der positiven x-Achse der Segmente von $G_\mathcal{U}$ ist nicht infinitesimal nahe bei $\frac{\pi}{2}$, also ist $\cos\alpha$ nicht infinitesimal und $\frac{\sum_i \delta_i}{\cos\alpha}$ eine sehr grobe obere Abschätzung der Länge der Segmente. Die ganze Kurve hat daher höchstens die Länge $\frac{b-a}{\cos\alpha}$, eine begrenzte Zahl.

Wir müssen aber auch zeigen, daß alle Werte von $G_\mathcal{U}$ begrenzt sind. Dazu betrachten wir die ssl Kurve, die linear von (a, a') nach (c, B) nach (d, B) nach (b, b') führt, wobei $B = \max\{a', b', \sup f\}$ ist. Diese Kurve erfüllt $(*)$ und ist eine obere Schranke für $G_\mathcal{U}$, wie man leicht aus der Definition von $G_\mathcal{U}$ erkennt.

Als nächstes müssen wir $G_\mathcal{U}$ mit g in Beziehung setzen. g ist der Standardschatten von $G_\mathcal{U}$, weswegen die Werte der beiden Funktionen nur infinitesimal voneinander abweichen. Für eine standard Partition $\mathcal{P}$ gilt $L_{g_\mathcal{P}} \approx L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{P}}$ weil auf standard Punkten die Funktionswerte nur unendlich wenig voneinander abweichen und nur standard endlich viele Partitionspunkte auftreten. Daraus und dem Verfeinerungsargument folgt nun, daß $L_{g_\mathcal{P}} \approx L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{P}} \leq L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{U}}$, was wiederum zu $L_{g_\mathcal{P}} \leq L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{U}} + 1$ führt. Also ist g rektifizierbar.

Die letzte Behauptung folgt aus $L_{g_\mathcal{P}} \approx L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{P}} \leq L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{U}} \leq L_{g_\mathcal{U}} \leq L_g$ und der Tatsache, daß $L_{g_\mathcal{P}}$ näher als jedes standard $\epsilon > 0$ and L_g heranrückt. □

Lemma 10. *g erfüllt die Bedingung $(*)$ und ist kürzer als alle anderen zulässigen Kurven. g ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir wissen schon, daß g die Bedingungen $(*)$ erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß g unter allen solchen Kurven die kleinste Länge hat. g erfüllt auch $(*_\mathcal{U})$ und daher gilt $L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{U}} \leq L_{g_\mathcal{U}}$. Außerdem gilt $g_\mathcal{U}(x) \approx G_\mathcal{U}(x)$ für alle standard x und sogar für alle x. Es sei h eine beliebige, von g verschiedene, zulässige Funktion. Es ist klar daß, $L_{(G_\mathcal{U})_\mathcal{U}} \leq L_{h_\mathcal{U}}$, weil $G_\mathcal{U}$ die ssl Funktion mit kleinster Länge ist, die $(*_\mathcal{U})$ erfüllt. Das Problem ist jedoch, daß der Unterschied der Längen infinitesimal sein könnte, obwohl $h_\mathcal{U}$ in mindestens einem standard Punkt vom Wert von $G_\mathcal{U}$ um mehr als ein Infinitesimales abweicht.

Wir nehmen also nun an, daß die Längen von g und h gleich sind (d.h. $L_{h_\mathcal{U}} \approx L_{g_\mathcal{U}}$), aber die Funktionen voneinander verschieden sind. Es gibt einen (standard) Punkt z, an dem h von g abweicht und es muß ein maximales (standard) Intervall I geben, auf dessen Innerem das Vorzeichen von $h - g$ fest ist, während an den beiden Endpunkten die Funktionen übereinstimmen.

Wenn das Vorzeichen negativ ist, dann muß es sich bei $I := [u, v]$ um ein Intervall handeln, daß frei von Stützpunkten des Hindernisses für g ist. Dann ist aber der Graph von g über I ein Geradensegment und dann ist die Länge des Graphen von $h_\mathcal{U}$ über I deutlich größer als die des Graphen von $g_\mathcal{U}$ wegen Lemma 5. Das widerspricht der Annahme, somit kann dieser Fall nicht auftreten.

Wenn hingegen $h-g$ auf (u,v) positiv ist (mit $h(u)=g(u)$ und $h(v)=g(v)$), dann verschieben wir das Geradensegment mit den Endpunkten $(u,g(u))$ und $(v,g(v))$ parallel nach oben bis es den Graphen von g nur noch in einem Punkt oder einem Intervall berührt. Wenn die Funktion, die das verschobene Segment darstellt mit s bezeichnet wird, dann gilt $g(x) \leq s(x)$ für alle $x \in [u,v]$. Sei z die x-Koordinate eines Berührpunktes, d.h. $g(z)=s(z)$. Daß diese Situation wirklich so eintritt wie eben beschrieben, folgt aus der Konkavheit von g. Die Funktion h durchquert s in dem Sinne, daß $h(z) > g(z) = s(z)$ ist, aber $h(u)-s(u)=h(v)-s(v) \leq 0$. Also gibt es ein maximales Intervall $[p,q] \subseteq [u,v]$ um z herum, so daß $s(p)=h(p)$ und $s(q)=h(q)$, aber $s(z) < h(z)$. Da wegen Transfer alle bezeichneten Größen standard sind, überleben alle diese Beziehungen den Übergang zu den Funktionen $g_{\mathcal{U}}$ und $h_{\mathcal{U}}$, wobei $s_{\mathcal{U}}$ sogar gleich s ist, denn $\mathcal{U}$ enthält alle standard Zahlen und s stellt ein standard Geradensegment dar. Nach dem Lemma 5 verkürzt sich auf $[p,q]$ die Länge bei Ersetzung von h durch s deutlich. Die weitere Ersetzung auf I durch $g_{\mathcal{U}}$ (Lemma 2) vermindert die Länge noch weiter. Das ist aber nicht möglich, weil nach Annahme ja die Länge von h fast gleich der minimalen Länge von $G_{\mathcal{U}}$ ist. Also kann auch dieser Fall nicht auftreten. $\square$

Literatur

[1] K. Hrbáček, Axiomatic foundations for nonstandard analysis, *Fundamenta Mathematicae* 1978, 98, pp 1 –19

[2] K. Hrbáček, Nonstandard set theory, *Amer. Math. Monthly*, 1979, 86, pp 659 – 677

[3] V. Kanovei und M. Reeken, *Nonstandard Analysis, Axiomatically*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004

[4] W.A.J. Luxemburg, *Non-standard Analysis*, Lecture Notes, CalTech, Pasadena 1962

[5] E. Nelson, Internal set theory; a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* 1977, 83, 6, pp 1165 –1198

[6] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North Holland, Amsterdam 1966

[7] P. Vopěnka, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979

[8] P. Vopěnka and P. Hájek, *The theory of semisets*, North-Holland, Amsterdam, 1972

[F] A. Fraenkel, *Einführung in die Mengenlehre*, 3. Aufl., Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1928

[G] Kurt Gödel, *Collected Works*, Ed. S. Feferman et al., Oxford University Press 1986, p. 311

[R] *Selected Papers of Abraham Robinson*, Volume 2, Ed. W.A.J. Luxemburg, S. Körner,

[S] Thoralf Skolem, *Selected Works in Logic*, Ed. by J.E.Fenstad, Oslo: Universitetsforlaget 1970, pp. 345 – 354

[EDM] *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge 1987