C'EST UNE FAÇON DE PARLER

MICHAEL REEKEN

Mathematik, Sprache, Philosophie – das scheint eine mathematisch ziemlich irrelevante und unfruchtbare Themenstellung. Tatsächlich ist das Thema so interessant und verzweigt, daß man ganze Vorlesungen damit füllen könnte.

Die Grundlagendebatten aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts haben so gut wie keine erkennbaren Spuren im allgemeinen „Mathematikbetrieb“ hinterlassen. Das hat Vor- und Nachteile. Mathematiker sind sich nicht immer bewußt wie stark auch die Entwicklung ihrer Wissenschaft von oft nur unbewußt aktiven Grundeinstellungen bestimmt wird. Auch in der Mathematik haben die Dinge mehrere Seiten, von denen manche unbeachtet bleiben.

Ich möchte vorbeugend erklären, daß ich modernen Vorstellungen von der Mathematik als einem sozialen Phänomen **ohne** objektiven Gehalt ablehnend gegenüberstehe. Es ist aussichtslos, eine Definition des Begriffes und des Umfanges der Mathematik geben zu wollen. Es ist auch nicht so, daß Mathematik irgendwo auf der Straße liegt und nur aufgehoben werden muß. Mathematik manifestiert sich in der Welt und im menschlichen Bewußtsein, von dem auch niemand sagen kann, was das eigentlich ist, obwohl jeder eine Vorstellung davon hat.

Das mathematische Denken, das sich im menschlichen Bewußtsein in einer erkennbar stabilen Form manifestiert, aber durch intensive Beschäftigung damit einer andauernden Entwicklung unterliegt, ist nicht nur das willkürliche Produkt sozialer Kräfte, die einen bei Geburt leeren biologischen Computer – das Gehirn – mit aus dem sozialen Umfeld stammendem, objektiv irrelevanten Inhalt füllen. Dieses Gehirn ist das Produkt einer Millionen von Jahren anhaltenden Formung durch die Evolution, die darin ihre Spuren ebenso hinterlassen hat, wie in der Anatomie.

Gerade auch der hier betrachtete Kontext der Infinitesimalmathematik eignet sich hervorragend zu illustrieren, wie soziale Kräfte im Widerstreit mit einem objektiven Inhalt stehen können, der sich über Jahrhunderte gegen gegenläufige Kräfte behauptet.

Das in meinem Titel aufgeführte Zitat von Leibniz gehört in den Kontext des Infinitesimalkalküls, der Mitte des 19. Jahrhunderts endgültig als unhaltbar verworfen wurde, obwohl niemand je auch nur den geringsten Zweifel an den Ergebnissen von über 100 Jahren Infinitesimalmathematik gehabt hat.

Danach wurde die Differential- und Integralrechnung, wie sie seitdem heißt, nach einem von Cauchy beigesteuerten Zwischenschritt von Weierstraß und anderen im ϵ, δ -Stil rekonstruiert. Diese Rekonstruktion war nicht wirklich neu, denn sie ist eine Übersetzung der Exhaustionsmethode (Archimedes) der hellenistischen Mathematik in die arithmetisierte Sprache, die sich in der Neuzeit in Europa etabliert hatte.

Date: Schriftliche Ausarbeitung eines Vortrages in der Mathematischen Bibliothek der Universität Wien am 3. Dezember 2008.

Stattdessen will ich die Aufmerksamkeit auf Leibniz und seine Anhänger richten. Das mathematische Denken dieser Zeit war stark auf physikalische Phänomene gerichtet, die in mathematischer Einkleidung einer Erklärung und Berechnung zugeführt werden sollten. Galileis Spruch, daß das Buch der Natur in mathematischer Schrift verfaßt ist, galt unangefochten.

Im Zusammenhang mit dem Phänomen der Bewegung, war es natürlich, die mathematische Beschreibung von zeitlichen Abläufen zu studieren. Der Zusammenhang zwischen dem Begriff der Geschwindigkeit und dem statischen Begriff einer Tangente, bzw. ihrer Steigung ist so ins Bewußtsein gerückt worden. Gleichermaßen erkannte man, daß das Problem der Flächenberechnung in einem gewissen Sinne invers zur Tangentenbestimmung war.

Es gab wohl auch ein Verständnis bei den Mathematikern dieser Zeit, daß diese Fragen in einem direkten Zusammenhang mit der Exhaustionsmethode stehen, wie sie aus den erhaltenen Schriften des Archimedes bekannt war: zu jeder gegebenen Fehlergröße wird die Approximation so weit getrieben, daß die gegebene Fehlergröße unterschritten wird. Die Rechnungen mit (abbrechenden) Dezimalbrüchen wurden durchaus als Näherungen begriffen, die sich aber „im Prinzip“ beliebig verbessern ließen.

Dabei mag Leibniz der Gedanke gekommen sein, diese etwas umständliche Argumentation auf der sprachlichen Ebene umzuformen und von infinitesimalen, also unendlich kleinen Fehlergrößen zu sprechen, aber nur im Sinne einer Sprachfigur, die in reproduzierbarer Weise das korrekte Argument kodiert.

Damit wird dann nur der gleiche Tatbestand ausgedrückt, daß man jede Fehlergröße unterbieten kann. Wir sind heute imstande im Detail zu verstehen, warum das tatsächlich als ein logischer Trick verstanden werden kann, der formal problemlos funktioniert. Aber es deutet vieles darauf hin, daß auch Leibniz dieses Verständnis im Ansatz besessen hat, obwohl er, soweit wir es wissen, keine formale Ausarbeitung dieser Gedanken gehabt hat.

Was uns Heutige irritiert ist ein aus unserer Sicht offensichtlicher Fehler in der Formulierung: es wird nämlich postuliert, daß Größen, die sich nur um Infinitesimale unterscheiden gleich seien! Objekte, die sich unterscheiden, können nicht gleich sein. Aber es ist auch klar, daß eine Umdeutung von „gleich“ in „infinitesimal äquivalent“ (d.h. einen infinitesimalen Abstand haben) das Problem sofort aus der Welt schafft.

Vielleicht schwebte Leibniz etwas von der Art vor. Immerhin wissen wir, daß er als erster die hochfliegende Idee einer *characteristica universalis* hatte, einer rein logischen Sprache, in der alle Probleme der Welt durch „Rechnung“ gelöst werden können.

Die formalisierten Sprachen, die heute in der mathematischen Logik betrachtet werden, sind ein schwacher Abglanz von seinen fantastischen Ideen. Die Probleme der Welt lassen sich damit nicht lösen, aber das (aktuelle) mathematische Verständnis haben sie ungemein befördert. Und sie zeigen auch, wie man seine Argumente bezüglich der Infinitesimalen rehabilitieren kann.

Die Popularisierer¹ von Leibniz begannen den Begriff der Infinitesimalen mit metaphysischen Spekulationen aufzuladen. Da waren die Infinitesimalen plötzlich Objekte in der Welt. Eine Kurve bestand aus infinitesimalen Geradenstücken, nicht

¹Damit sind selbstredend **nicht** Mathematiker wie die Bernoullis oder gar Euler gemeint!

im Sinne eines Gleichnisses oder einer logisch unterfütterten Sprachwendung, sondern „wirklich“.

Leibniz, der Philosoph, welcher der Metaphysik zugetan und von dem aktual Unendlichen der Natur überzeugt war, war in der Mathematik dezidiert anderer Ansicht. Aber wie man immer wieder beobachten kann, werden die geistigen Kinder ihren Vätern und Müttern oft entrissen und bis zur Unkenntlichkeit verwandelt.

Lassen Sie mich jetzt das Wort an Leibniz weitergeben. Ich hatte vor Jahren ein Zitat aus einem seiner Briefe an einen eifrigen Anhänger, der bei ihm nach schlagenden Argumenten fragte, und die Antwort erhielt, das sei nur eine Art des Sprechens, wem das nicht gefalle müsse es im Stile des Archimedes und seiner Exhaustionsmethode machen. Leider ist mir die Notiz in meinen Papieren verloren gegangen und ruht irgendwo im Verborgenen.

Stattdessen zitiere ich jetzt aus einem 1712 in den *Acta Eruditorum* veröffentlichten Artikel mit dem eindrucksvollen Titel:

Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitatis nihilo minores, et de vero sensu Methodi infinitesimalis

In deutscher Übersetzung:

Bemerkung zur Nichtexistenz von Verhältniszahlen und Proportionen mit negativen Größen und zur wahren Bedeutung der Methode der Infinitesimalen

Mir liegt der Artikel nicht im lateinischen Original vor, sondern in einer Übersetzung ins Französische (aus dem Jahre 1995) von Marc Parmentier, denn mir fehlt die Geduld mich mit Sprachen herumzuplagen, die ich nicht flüssig beherrsche.

Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit Leibnizens Ablehnung von Verhältnissen, in denen negative Zahlen vorkommen. Aus heutiger Sicht erscheint das kurios und dem großen Mann unangemessen, aber diese Beobachtung ist als Ausdruck mathematischer Genauigkeit durchaus angebracht. Proportionen sind nicht Brüche in einem schon fixierten Zahlensystem, sondern Verhältnisse von geometrischen Strecken, Flächen oder Volumina zueinander. Das Vorzeichen erscheint da ebenso wenig, wie in dem modernen Begriff des metrischen Raumes negative Distanzen erscheinen.

Bei der Lektüre solcher uns Heutigen überflüssig erscheinenden Diskussionen, wird einem, wenn man nicht von der Überlegenheitshybris der jeweiligen Gegenwart befallen ist, klar, wie Mathematik sich im Laufe der Zeit entfaltet: oft nicht im Sinne von überkommenen Vorstellungen, sondern gegen sie. Der Gedanke, mit welchem Kopfschütteln spätere Generationen unsere im Mantel der Endgültigkeit verkündeten Dogmen zur Kenntnis nehmen werden, hat etwas sehr Heilsames und Erheiterndes.

Nun aber zu dem Teil des Artikels der sich mit der Methode der Infinitesimalen befaßt. Nach eingehender Diskussion, warum man nicht von einem Verhältnis von 1 zu -1 sprechen könne, aber wohl das Rechnen mit Proportionen so erweitern kann, daß das „Nichtverhältnis“ 1 zu -1 gleich dem von -1 zu 1 im Kalkül erscheint, fährt er folgendermaßen fort.

Sans soutenir l'épreuve de la rigueur, elles n'en sont pas moins d'un grand usage dans le calcul ainsi que dans l'art d'inventer, et ont valeur de notions universelles². Euclide eut une expression de ce genre lorsqu'il déclara l'Angle du Contact plus petit que tout angle rectiligne³. Il en va de même de maintes expressions des Géomètres, renfermant une formulation figurée et cachée. Elles n'en revêtent pas moins pour ainsi dire, un certain degré d'acceptabilité.

- Ohne den Test der Strenge zu bestehen, sind sie von großem Nutzen sowohl im Kalkül als auch bei der Kunst der Erfindung und haben Wert als universelle Begriffe⁴. Das findet bei den Geometern häufig in der Weise statt, daß Sprechweisen eingeführt werden, die figurative oder versteckte Beschreibungen beinhalten. So etwa, wenn Euklid den Kontaktwinkel (zwischen Kurve und Tangente) für kleiner erklärt als jeden Winkel zwischen einander schneidenden Geraden.

De plus, tout comme je nie la réalité d'un rapport dont un des termes est moindre que zéro, je nie également qu'à proprement parler il existe un nombre infini ou infiniment petit, ni aucune ligne infinie ou infiniment petite, même si souvent Euclide, mais dans un sens bien déterminé parle de ligne infinie. L'infini continu ou discret n'est proprement ni une unité, ni un tout, ni une quantité, et lorsque par analogie nous l'employons dans ce sens, c'est pour ainsi dire une façon de parler; je veux dire que lorsqu'une multiplicité d'objets excède tout nombre, nous leurs en attribuons un malgré tout, par analogie, et nous l'appellons infini.

- So wie ich die Existenz von Proportionen mit negativen Termen verneine, so verneine ich die Existenz von unendlichen und unendlich kleinen Zahlen, sowie die von unendlichen oder unendlich kleinen geraden Linien. Das unendliche Kontinuum und die diskrete Unendlichkeit ist weder eine Einheit, noch ein Ganzes, noch eine Größe. Das sind nur Sprechweisen. Wenn eine Vielheit von Objekten jede Zahl übersteigt, ordnen wir ihr nichtsdestotrotz eine Zahl zu und nennen sie unendlich.

Ainsi j'ai établi autrefois que lorsque nous appelons une erreur infiniment petite, nous voulons dire moindre que toute erreur donnée

²Ou plus exactement, ce sont elles qui permettent de rendre les notions (et les règles de calcul) universelles.

³Livre III, proposition 16

⁴(Oder genauer gesagt, diese sind es, welche die Begriffe (und die Regeln des Kalküls) universell machen.)

et partant nulle en réalité⁵; et lorsque nous comparons un terme ordinaire, un terme infini et infiniment infini, c'est exactement comme si nous comparions par ordre croissant, le diamètre d'un grain de poussière, le diamètre de la terre, et celui de la sphère des fixes, ou des grandeurs par degré toujours plus grandes ou plus petites que celles-ci. ... Mais lorsque par un saut à la limite, nous disons seulement infini ou infiniment petit, nous nous plions à une commodité de langage, c'est à dire un raccourci mental, mais nous ne disons plus que des choses *vraies par tolerance*, dont le sens devient *rigoureux* quand on les explique.

- Ich habe an anderer Stelle ausgeführt, daß wir einen Fehler unendlich klein nennen, wenn er kleiner als jede angebbare Größe ist, und deshalb Null ist (siehe Fußnote 5). Wenn wir der Reihe nach die Durchmesser eines Staubkornes, der Erde, und der Sphäre der Fixsterne vergleichen, dann entspricht das dem Vergleich eines gewöhnlichen Termes mit einem unendlichen und einem unendlich unendlichen. Wenn man aber dann einfach von unendlich oder unendlich klein spricht, sagt man nur noch etwas Halbwahres, das korrekt wird, wenn man es erklärt.

Das ist zugegebenermaßen dunkel, obwohl man auf unbestimmte Weise herauszuhören meint, worauf er hinauswill. Aber wie dem auch sei, folgendes möchte ich hervorheben: Leibniz füllt die Infinitesimalen nicht mit metaphysischem Inhalt, wie seine Popularisierer, sondern weist das energisch zurück. Er scheint auch das aktual Unendliche in der Mathematik strikt abzulehnen, oder es nur als Sprechweise dulden zu wollen. Und seine Versuche, den Kern seiner Idee klar zu machen, zeigen, daß er dabei auch ein jedem bekanntes Phänomen im Auge hat: die ungeheuren Unterschiede in den für uns erkennbaren Größenordnungen der Zahlen, die sich in seinen Infinitesimalen widerspiegeln sollen.

Jetzt machen wir einen Zeitsprung in das Jahr 1933. Da hat Skolem zur Überraschung und Enttäuschung aller an Grundlagenfragen Interessierten gezeigt, daß kein Axiomensystem der Arithmetik erster Stufe die Arithmetik bis auf Isomorphie bestimmen kann. Diese Entdeckung war eigentlich aus der Perspektive der ϵ, δ -renovierten Analysis eine Sensation ersten Ranges, denn nimmt man Skolems Modell, dann gibt es darin Zahlen, die größer sind als alle gewöhnlichen Zahlen, die in diesem Modell eindeutig identifizierbar sind. Diese zuerst genannten Zahlen sind in Leibnizens Sprechweise als unendliche Zahlen zu bezeichnen.

Erzeugt man nun aus diesen „natürlichen Zahlen“ den Körper der rationalen Zahlen in der wohlbekanntesten Weise, dann erhält man unendliche und unendlich kleine rationale Zahlen in der von Leibniz angegebenen Weise: eine positive Zahl

⁵Hinweis des Übersetzers: dem Père Tournemine gibt Leibniz an anderer Stelle die folgende Erklärung.

Je les prend donc, non pas pour des riens ni même pour les infiniment petits à la rigueur, mais pour des quantités incomparablement ou indéfiniment petites, et plus que d'une grandeur donnée ou assignable, inférieures à d'autres dont elles sont les différences, ce qui rends l'erreur moindre qu'aucune erreur assignable ou donnée, et par conséquent elle est nulle.

- Ich betrachte die Infinitesimalen also weder als Null noch als „unendlich klein im strengen Sinne“, sondern als unvergleichlich oder unbestimmbar kleiner als andere Terme, deren Differenz sie sind, so daß der Fehler Null ist.

ist infinitesimal, wenn sie kleiner ist als alle gewöhnlichen Zahlen, also jene Zahlen, die wir im üblichen Verständnis im Auge haben und die in diesem Modell der rationalen Zahlen eindeutig identifizierbar sind. Damit entpuppte sich der Grund für die 100 Jahre andauernde Kritik an der Infinitesimalmathematik und die Motivation für die Rekonstruktion lediglich als Folge einer verengten Sichtweise.

Ganz so schlimm wie ich das jetzt aus rhetorischen Gründen darstelle ist es natürlich nicht, denn mittlerweile hatte sich Cantors Mengenlehre gegen alle Kritiker behauptet und war von Zermelo und Fraenkel axiomatisiert worden, um das Gespenst der Russell-Antinomie zu bannen. Da das solcherart axiomatisierte System (im Expertenjargon **ZFC** genannt) von erster Stufe ist, hat es eine Formalisierung und die rekonstruierte Analysis fand sozusagen eine natürliche Heimstatt in der Mengenlehre, ganz so wie Cantor und Hausdorff das gesehen hatten.

Aber zurück zu Skolem. Weder er noch seine Zeitgenossen scheinen je bemerkt zu haben, daß ein Jahrhundertstreit als illusorisch entlarvt worden war. Erst Robinson entdeckte das bei seinen modelltheoretischen Untersuchungen. Da müssen wir aber um weitere 30 Jahre vorwärts springen.

Robinson ist nach eigenem Zeugnis Formalist. Ich zitiere aus seinem Artikel *Formalism 64*.

To those who believe that on all matters of principle the correct answers have already been given by one existing school of thought or another, this presents no problem. Personally, I have to admit that I cannot share this optimistic opinion. It seems to me that all points of view that have been put forward as a philosophical basis for Mathematics involve serious gaps and difficulties, including the point of view which I now hold and which I propose to expound in this address.

...

My position concerning the foundations of Mathematics is based on the following two main points or principles.

(i) Infinite totalities do not exist in any sense of the word (i.e. either really or ideally). More precisely, any mention, or purported mention, of infinite totalities is, literally, *meaningless*.

(ii) Nevertheless, we should continue the business of Mathematics „as usual“, i.e. we should act *as if* infinite totalities really existed.

Man muß das auf sich wirken lassen, bis man das ganze Ausmaß dieser Deklaration erfaßt. Sie ist von außerordentlicher intellektueller Ehrlichkeit, indem sie das klaffende Loch in einer der für die Mathematik des 20. Jahrhundert wesentlichen Denkrichtungen schonungslos offenlegt und gleichzeitig dazu aufruft, weiterzumachen wie bisher. Er macht aber klar, daß er das Ziel einer Aufklärung nicht aus dem Auge verlieren möchte. Er weist auch darauf hin, daß es in der Logik üblich geworden sei, überabzählbar viele Namen für die Objekte des Objektbereiches zu vergeben, womit die Mengenlehre als metamathematischer Hintergrund akzeptiert wird, was Hilbert's aufklärerischen Intentionen, diametral zuwiderläuft. Er gibt sogar im Appendix einen Hinweis, in welcher Richtung vielleicht Fortschritt in dieser Frage erzielbar sein könnte. Mir ist nicht bekannt, daß diese Anregung jemals verfolgt worden ist.

Man beachte hier die Ähnlichkeit in der rigorosen Zurückweisung aktueller Unendlichkeiten. Der Philosoph Leibniz war in der Mathematik offenbar näher an den Formalisten als z.B. Cantor mit seiner Mengenlehre, der übrigens auch ein philosophisches Interesse und eine substantielle philosophische Ausbildung in seine Mengenlehre einbrachte. Cantor hat die Mengenlehre in einer nicht formalisierten Weise entwickelt, die von Hausdorff und anderen aufgegriffen worden ist, bevor die Axiomatisierung durch Zermelo und Fraenkel vollendet war. Es ist möglich die Mengenlehre (oder zumindest die Theorie der Ordinalzahlen) als eine philosophische Theorie des (transfiniten) Unendlichen in mathematischem Gewand zu sehen.

Als formale Theorie erster Stufe ist sie zum Objekt auch für den Formalisten geworden, während der sogenannte „working mathematician“ zumindest in seinem Alltag eine informelle Interpretation des Mengenbegriffes vornimmt.

Robinson äußert ernste Zweifel daran, daß der Mengenbegriff eine fundamentale mathematische Bedeutung hat und seine Argumente sind von allen Kritikern in der einen oder anderen Form vorgebracht worden. Ich finde viele dieser Kritiken bedenkenswert, aber ich halte sie nicht für entscheidend.

Es ist ein empirisches Faktum, daß die **Sprache** der Mengenlehre eine starke Affinität zu dem „naiven“ mathematischen Denken hat und die Axiome der Theorie drängen sich diesem Denken geradezu auf. Die sofort einsetzende Kritik an der Mengenlehre (etwa Kronecker und Poincaré) hat gerade damit zu tun, weil die (manchmal vorschnell) verallgemeinernde Tendenz, die diesem Denken eigen ist und traditionell von den Mathematikern durch strenge geistige Disziplin und dem Wunsch nach überschaubaren geistigen „Konstruktionen“ gezügelt wurde, in der Mengenlehre völlig enthemmt zu werden scheint.

Insofern hat die Axiomatisierung und Formalisierung der Mengenlehre viel zur Klärung und zur Beruhigung des Streits beigetragen. Der Formalismus der Mengenlehre ist unbestechlich und wenn seit 100 Jahren keine Inkonsistenzen sichtbar geworden sind, muß man sich diesbezüglich nicht die Ruhe rauben lassen. Auch die Vielzahl der unentscheidbaren Probleme in der Mengenlehre muß man nicht als Unglück sehen, sondern kann sie als Einladung betrachten, diese (wie wir seit den Unvollständigkeitssätzen wissen) notwendige Unterbestimmtheit der formalen Theorie zwecks Erweiterung des Horizontes auszunutzen.

Man kann die nonstandard Modelle (von Superstrukturen) als Anreicherungen der Ausgangsstruktur mit „idealen Objekten“ (im Sinne der idealen Punkte in der Geometrie) auffassen, die es erlauben die Sprache erster Stufe der Ausgangsstruktur ausdrucksstärker zu machen. Damit das funktioniert, muß man die Einschränkung der $\in$ -Relation auf die Anfangssuperstruktur mittels einer artifiziellen Relation uminterpretieren und dann die natürliche Einbettung der Ausgangsstruktur in dem nonstandard Modell in die Betrachtung einbeziehen. Das geschieht mit der Ultrapotenzmethode.

Was diese Operation zeigt, ist die überraschende Erkenntnis, daß in einer mengentheoretischen Sprache, in einem System das Separation hat, Prädikate konsistent auftauchen können, die nicht der Separation unterliegen!

Denn das Prädikat st , das die Untermenge der eingebetten Objekte der Ausgangssuperstruktur separiert (in der $\in$ -Sprache der Mengenlehre), wird von der artifiziell uminterpretierten $\in$ -Relation des nonstandard Modelles der Superstruktur nicht als Menge (in diesem artifiziellen Sinne) erkannt. Aber diese artifizielle $\in$ -Relation kodiert getreu die Mathematik in der ursprünglichen Superstruktur.

Bedenkt man aber, daß die artifizielle $\in$ -Relation der Träger der mathematischen Information über die ursprüngliche Superstruktur ist, dann wird die mit einem relativ dazu nicht-extensionalen Prädikat st verknüpft, und das und nur das liefert das relevante unterscheidende Merkmal zur Anfangssuperstruktur.

Die nonstandard Modelle können als Erweiterungen durch „ideale Objekte“ verstanden werden, die sich individuell eigenartig verhalten, aber eingebettet in das Ganze die Aussagen erster Stufe ungeändert lassen. Da man solche idealen Objekte auf unendlich vielfache Weise hinzufügen kann, gibt es viele solche Erweiterungen, die man aber nicht als was „Neues“ sehen kann, denn ohne die nicht-extensionale Unterscheidung zwischen „nicht ideal“ und „ideal“ sind sie ununterscheidbar von der Ausgangsstruktur. Mit einem Wort, von einem solchen nonstandard Modell isoliert zu sprechen, ohne das eingebettete Original, ist irrelevant, weil es in der relevanten Sprache ununterscheidbar vom Original ist.

Wenn also von Erweiterungen gesprochen wird und man hören kann, daß diese „Erweiterung“ als analog zur Cantorschen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ aufgefaßt wird, dann zeigt sich diese Gefahr der Mißdeutung eklatant: $\mathbb{R}$ ist in der $\in$ -Sprache ganz klar unterschieden von $\mathbb{Q}$, und zwar ohne Referenz auf das eingebettete $\mathbb{Q}$, welches seinerseits als ganz normale Untermenge in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Im übrigen bestimmt die Mengenlehre unendlich viele irrationale Zahlen eindeutig, während die nonstandard Objekte in der artifiziellen Mengenstruktur des nonstandard Modelles unbestimmbar sind.

Jetzt machen wir einen kleinen Zeitsprung in das Jahr 1977. In diesem Jahr erschien in dem Bulletin of the AMS ein Artikel von E. Nelson mit dem Titel *Internal Set theory*. Nelson störte nach eigenem Bekunden mir gegenüber die Diskrepanz zwischen den Argumenten, welche die herkömmliche Argumentation (in der Sprache von **ZFC**) erzwingt und den Intuitionen, die z.B. er in seinem ursprünglichen Fachgebiet entwickelt hatte und seinen Studenten in der eigenen Form nicht vermitteln konnte. Die technische Komplexität der mengentheoretischen Darstellung noch weiter zu erhöhen, durch Einführung der modelltheoretischen Methode war daher keine Alternative.

Nelson's System **IST** ist eine Modifikation von **ZFC**, es wird nur ein Prädikat st hinzugefügt und einige Axiome, die die Wechselwirkung des Prädikates mit dem logischen Kalkül festlegen. Es ist bewiesen, daß das System äquivalent mit **ZFC** ist. Der Beweis stützt sich auf die Ultrapotenzmethode, aber das Resultat ist, daß die ganze Mengenlehre auf einen Schlag fähig wird, über in der Sprache von **ZFC** unbeschreibbare Mengen, die nur Sprechweisen („ideale Mengen“) sind, konsistent zu argumentieren, also im Sinne von Leibniz tatsächlich *une façon de parler*. Und zu alle dem erscheint plötzlich eine perfekte Korrespondenz zu den dunklen Bemerkungen von Leibniz. Wenn man das System beherrschen gelernt hat, und sein Operieren voller Staunen betrachtet, fällt es einem wie Schuppen von den Augen, wovon Leibniz gesprochen haben mag.

In der modelltheoretischen Variante sieht man die Einfachheit des Effektes gar nicht, sondern man steht ehrfürchtig vor einem gewaltigen technischen Aufwand, den man ergebnislos hinnimmt und sich technische Fertigkeit im Umgang damit erwirbt, ohne daß einem klar wird, daß es eigentlich ein syntaktischer Effekt zu sein scheint, der für die Rehabilitierung des Infinitesimalkalküls ausgenutzt wird.

In der modelltheoretischen Version steckt ein gewisser technischer Zusatzgewinn drin, von dem unklar ist, ob er wirklich unentbehrlich ist, oder in der axiomatischen

Version durch andere, aus mangelnder Vertrautheit damit noch nicht erkannte Beweismethoden ausgleichbar wäre. Der Zusatzgewinn erklärt sich daraus, daß die idealen Objekte in der ursprünglichen Mengenwelt eingebettet sind und daher mit mengentheoretischen Argumenten behandelt werden können, während in den internen Theorien wie **IST** und dem späteren **BST** die idealen Punkte in gewisser Weise ein Eigenleben führen; in **BST** jedoch nur scheinbar.

Natürlich ist es müßig zu spekulieren, wieviel Leibniz wirklich in der Hand hatte, aber man weiß, daß er nur Sachen publiziert hat, die er für opportun hielt und einem Briefpartner hat er einmal anvertraut, daß man nicht zuviel erklären sollte, damit einem die Leser „nicht auf die Schliche kommen“. Wenn Leibniz einfach nur einer von den metaphysisch schwadronierenden Popularisierern gewesen wäre, würde ich keinen Gedanken in diese Richtung verschwenden, aber bei jemand seines Kalibers beschleicht mich doch ein seltsames Gefühl, daß er möglicherweise mehr wußte, als er verraten hat.

Die modernen Versionen, weder die modelltheoretische noch die axiomatische kommen wegen ihres mengentheoretischen Hintergrundes dafür in Frage. Sollte es aber gelingen, z.B. für **BST** einen rein syntaktischen Äquikonsistenzbeweis zu finden, dann wäre es denkbar, daß er in dem viel bescheideneren Rahmen des damaligen Entwicklungsstandes der Mathematik eine Art von Vorstellung davon hatte, daß es um einen syntaktischen Effekt ging.

Nun aber zurück zu den axiomatischen Theorien, die Robinsons Entdeckung thematisieren. Die Geschichte ist mit **IST** nicht zu Ende, sondern beginnt da. Ein Jahr danach erschien ein Artikel von K. Hrbáček, in welchem drei verschiedene axiomatische Mengentheorien aufgezeigt wurden, von denen zwei unübersehbare Ähnlichkeit mit der modelltheoretischen Version haben, aber in einer globalen Weise.

Weitere Versionen von anderen Autoren folgten, die im Grunde zeigten, daß den formalen Erweiterungen eines formalen Kalküles keine Grenzen gesetzt sind. Eine Entscheidung über das Interesse an einer solchen Erweiterung muß daher aus über das Formale hinausgehenden Erwägungen kommen. Aber meine Zeit läuft ab und ich werde jetzt zum Ende meines Vortrages kommen, indem ich auf zwei Theorien hinweise, die von V. Kanovei und mir in den 90er Jahren entwickelt wurden und mit einer der Theorien von Hrbáček in engem Zusammenhang stehen.

Die Theorie **HST** kann über der Theorie **BST** „konstruiert“ werden und ich will mich auf die Theorie **BST** einschränken. Sie ist in einem engen Sinne mit **ZFC** verknüpft: sie erweitert das System um ideale Mengen, so daß alles, was man über „nicht ideale“ Mengen in der erweiterten Sprache sagen kann, sich in effektiver Weise übersetzen läßt in eine Aussage in der $\in$ -Sprache der Mengenlehre über diese Mengen. Damit ist erkennbar, daß diese Theorie tatsächlich nichts anderes ist, als eine *façon de parler*. Hier wird Leibniz vollständig rehabilitiert und zwar in einem sehr viel weiteren Rahmen, als ihm zu seiner Zeit zugänglich war.

HST ist eine Erweiterung, in der die „idealen Mengen“ vollen Mengenstatus erhalten und Separation wieder voll in der erweiterten Sprache gilt (also der vertraute mengentheoretische Kontext), aber das Mengenuniversum sehr kompliziert gebaut ist. Es sieht übrigens so aus, daß es wie ein nonstandard Modell des Universums der wohlfundierten Mengen gebaut ist, das natürlich aus nicht wohlfundierten Mengen besteht, denn es gibt keine wohlfundierten Mengen außerhalb des Universums der durch **ZFC** beschriebenen Mengen.

IST war die einzige unter den axiomatischen Theorien, die auf Anhieb eine Reihe von Anhängern unter den „working mathematicians“ gefunden hat. Kurioserweise ist auch da eine Tendenz zu beobachten, in die Theorie das Gegenteil hineinzulesen, von dem was sie eigentlich zeigt: daß man „ideale Mengen“ als Sprachfiguren einführt, die das Sprechen und intuitive Denken in genau der Weise befördern, wie sie das in der Epoche des Infinitesimalkalküls getan haben, daß es aber völlig ungerechtfertigt ist, z.B. von „wirklichen“, unendlichen Zahlen in der Menge der natürlichen Zahlen zu sprechen, die man da entdeckt habe. Damit wird im Grunde die gleiche Mißdeutung vorgenommen, die die nonstandard Modelle hervorrufen: da heißt es man habe doch die nonstandard Objekte mengentheoretisch konstruiert, also sind sie „wirklich“ da!

Die Mengenlehre betrachte ich als ein logisches Gerüst, das die Idee der aktual unendlichen Mengen thematisiert. Welchen ontologischen Status die Mengen haben, sollte man der Zukunft zur Entscheidung überlassen. Die Mengen, die in ZFC beschreibbar sind, d.h. eine eindeutige $\in$ -Definition besitzen, geben einen sehr zufriedenstellenden Blick auf die mathematischen Objekte, die sich als Phänomene von außen unserem Denken aufdrängen. Alles andere sollte man nicht dogmatisch festlegen.

Das gilt umsomehr, nachdem Robinsons Entdeckung sowohl in der modelltheoretischen als auch in der axiomatischen Variante klar zeigt, daß selbst der Anspruch der Mengenlehre, eine vollendete Kodifikation des mathematischen Denkens zu sein, nicht aufrecht zu erhalten ist, wenn der sagen wir mal „Infinitesimaleffekt“ nur um den Preis einer artifiziellen Umdeutung der grundlegenden $\in$ -Relation darzustellen ist, bzw. um den Preis einer Erweiterung des formalen Systems um ein extensional nicht interpretierbares Prädikat.

Eine formale Theorie, die über Objekte „spricht“, die sie nicht bestimmen kann, sollte nicht dazu mißbraucht werden, beweisbare Formeln vom Typ $\exists x...$ als Garantie für eine „reale Existenz“ in einem erst noch zu erklärenden Sinne zu verstehen. Wenn die Theorie Objekte eindeutig festlegt, dann hat man einen guten Grund der Frage nachzugehen, ob diese Theorie größere phänomenale Komplexe zufriedenstellend beschreiben kann. Wenn die Theorie aber sogar selbst ausschließt, daß nonstandard Objekte eindeutig bestimmbar sind, dann ist es absurd, von der realen Existenz solcher Objekte zu sprechen. Das gleiche gilt von der modelltheoretischen Variante. In der Geometrie wäre jeder, der die idealen Punkte als „real“ betrachtet hätte, wohl schief angesehen worden.

Man sieht hier wie – formalistisch gesehen – völlig klare und unkritisierbare Ergebnisse durch Verschiebung in einen ganz anders gearteten Kontext bei Mathematikern, deren Denken von einem anderen Hintergrund geprägt ist, zu Mißverständnissen Anlaß geben, die der formalistischen Auffassung, der sie entsprungen sind, Hohn sprechen.

Die faszinierende Geschichte der Infinitesimalmathematik, die über 100 Jahre lang berausende Erfolge feierte und damit ihre Kritiker klein hielt, bis sie ihr Pulver verschossen hatte und in Acht und Bann getan wurde, um nach weiteren mehr als 100 Jahren wieder aufzutauchen, aber diesmal in zwei Varianten, beide aus der formalistischen Betrachtung der Mathematik erwachsen, aber schon wieder in Zwietracht, weil die Mathematiker auch konservativ sind und erstmal zäh an dem jeweils individuell erreichten *status quo* festhalten, was aber auch nicht notwendigerweise ein Unglück ist.

Auf jeden Fall bin ich optimistisch, daß im Laufe der Zeit mehr und mehr Mathematiker (auch unter den „working mathematicians“) erkennen werden, daß in den formalen Theorien nicht alles, vor dem das Symbol $\exists$ auftaucht, Bezug zur phänomenalen Realität haben muß, und daß die Welt des Formalen mindestens so groß ist, wie das Mengenuniversum Cantors. In der Mathematik wird nie das letzte Wort gesprochen sein.

Irgendwann wird es akzeptiert sein, daß ein perfekt in die extensionale Mengenlehre integrierbares, nicht-extensionales Prädikat auf noch unerforschte Bereiche verweist, die man nicht durch Denkverbote und Vorschriften, wie diese innerhalb des sakrosankten Systems der Mengenlehre durch mühselige Umschreibungen zu realisieren seien, auf Dauer aus dem Gesichtskreis wird verbannen können.