1. Lösungen

Aufgabe 1. Da der Begriff „infinitesimal" extern ist (keine reine Mengensprache), wird dadurch gar keine Menge definiert und die Berufung auf das Überschußprinzip ist falsch. Stattdessen definiert man die Mengen

$$M_k := \left\{ n \in \mathbb{N} : \forall i \leq n \; |a_i| < \frac{1}{k+1} \right\}$$

und schließt aus der Voraussetzung, daß für alle standard k die definierende Ungleichung für jedes standard n erfüllt ist, weil die als infinitesimal vorausgesetzte Zahl $|a_i|$ kleiner ist als jeder standard Stammbruch. Jetzt ist die Anwendung des Überschußprinzips gerechtfertigt.

Aufgabe 2. Die Folge $a_{\bullet}$ ist zwar in Mengensprache definiert, aber der Parameter N ist nonstandard, so daß die Folge nicht standard ist und daher Anwendungen von Transfer ausgeschlossen sind.

Aufgabe 3. Dabei handelt es sich nicht um eine Menge, weil die volle Sprache wesentlich in die Definition eingeht. Man könnte allenfalls von einer „externen Folge" sprechen, die aber nicht den Axiomen der Mengenlehre unterworfen ist.

Aufgabe 4. Da die fernen Glieder der Folge in einer Monade liegen, gibt es für diese eine Abschätzung, z.B. $|a_M|+1$. Die Abschätzung $\forall n \geq k \; |a_n| \leq |a_M|+1$ gilt für alle großen k und muß nach dem Überschußprinzip noch bis zu einem standard Index ausdehnbar sein: $|a_i| \leq |a_M| + 1$ für alle $i \geq k$ mit k standard. Es gibt also für den standard Endabschnitt E_k eine obere Schranke (die möglicherweise nonstandard ist!). Nach Transfer (die Folge $a_{\bullet}$ ist standard) gibt es aber dann sogar eine standard Schranke. Für die verbleibenden a_i bilden wir das Maximum $\max_{i<k} \{|a_i|\}$ und erhalten daraus und der zuvor Erschlossenen eine standard Schranke für die ganze Folge.

Aufgabe 5. Die Lösung stützt sich auf die vorangehende Aufgabe. Der Standardschatten von $a_{\bullet}$ ist definiert. Auf jedem standard Anfangsabschnitt A_k (d.h. $A_k = \{n \in \mathbb{N} : n \leq k\}$) unterscheidet sich der Standardschatten von der Folge selbst um Infinitesimale. Also gibt es nach Robinsons Lemma einen großen Index K, so daß $\left|a_i - {}^{\langle\circ\rangle}a_i\right| \approx 0$ für alle $i \leq K$. Also unterscheiden sich die Folge und ihr Standardschatten bis zum Index K nur infinitesimal. Aber der Standardschatten ist nach der vorangehenden Aufgabe gleichmäßig begrenzt. Also gilt das auch für die lange Folge bis zum Index K, aber die verbleibenden fernen Glieder liegen ja in der gleichen Monade wie die fernen Glieder unterhalb von K.

Die Aufgabe kann auch ohne Berufung auf den Standardschatten gelöst werden: dazu betrachtet man die Menge $M := \{i \in \mathbb{N} : \forall j > i \, |a_j - a_N| < 1\}$; da alle großen Indizes i in dieser Menge enthalten sind, muß auch ein standard Index i enthalten sein. Also ist die Folge ab diesem Index i begrenzt und der Rest ergibt sich durch Maximumbildung über die Indizes $\leq i$.

Aufgabe 6. Es sei die lange Reihe $\sum_{i=0}^{N} a_i$ ein s-konvergentes nonstandard Anfangsstück einer standard unendlichen Reihe. Die Menge

$$M_k := \left\{ n \in \mathbb{N} : \forall j, m \left(N \geq m > j \geq n \Rightarrow \left| \sum_{i=j+1}^{m} a_i \right| < \frac{1}{k+1} \right) \right\}$$

enthält nach Annahme alle nonstandard $n \leq N$ und somit nach dem Überschußprinzip ein standard n. Also gibt es zu jedem standard k ein standard n, so daß für alle standard $j, m \geq n$ die Abschätzung $\left|\sum_{i=j+1}^{m} a_i\right| < \frac{1}{k+1}$ gilt. Da der Parameter, nämlich die gegebene Folge, standard ist, können wir wegen Transfer alle st in dieser Aussage löschen. Also ist die unendliche Reihe konvergent.

Aufgabe 7. Die Summe der fernen Summanden von $\frac{1}{N+1}$ bis $\frac{1}{2N}$ kann nach unten abgeschätzt werden durch $N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$. Also kann es sich bei den Partialsummen nicht um eine Cauchy-Folge handeln. (Dieser Beweis unterscheidet sich nur unwesentlich vom herkömmlichen.)

Aufgabe 8. Es gilt für alle begrenzten x und y

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \left(1 + \frac{y}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{x + y + \frac{xy}{N}}{N}\right)^N =$$

$$= \exp_N(x + y + \frac{xy}{N}).$$

Es ist aber in den Vorträgen schon bewiesen worden, daß $\exp_N$ auf den begrenzten Zahlen s-stetig ist. Da $\frac{xy}{N}$ für alle begrenzten x und y aber infinitesimal ist, folgt:

$$\exp_N(x) \cdot \exp_N(y) \approx \exp_N(x + y).$$

Aufgabe 9. Es sei O eine standard Menge. (1) es sei O eine offene Menge. Dann gibt es zu jedem ihrer Punkte eine offene Umgebung, die ganz in O liegt. Wegen Transfer gibt es daher zu jedem standard Punkt x von O eine standard Umgebung, die ganz in O liegt. Eine standard Umgebung enthält aber stets auch ein standard Intervall $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ und offensichtlich ist die Monade von x ganz darin enthalten.

(2) Es sei eine standard Menge gegeben, die s-offen ist. Es sei x ein beliebiger standard Punkt aus O. Die Intervalle $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ für infinitesimale, positive ϵ sind nach Annahme alle in O als Untermengen enthalten. Wegen des Überschußprinzips gilt das auch noch für ein standard, positives ϵ, also ist O offen (denn wegen Transfer brauchen wir die Definition nur für standard Punkte und standard Umgebungen nachzuprüfen).

Aufgabe 10. Die Definition lautet so: eine Menge heißt *s-abgeschlossen*, wenn jeder standard Punkt, der infinitesimalen Abstand von einem Punkt der Menge hat, der Menge angehört.

Der Grund dafür ergibt sich so: das Komplement soll ja s-offen sein. Wenn also der standard Punkt infinitesimalen Abstand zu einem Punkt der Menge hat, kann er nicht zu deren Komplement gehören, denn dann wäre ja die ganze Monade dort enthalten, was zum Widerspruch führt.

(1) Es sei A eine standard, abgeschlossene Menge. Es sei ein standard Punkt x gegeben, der infinitesimalen Abstand zu einem Punkt p von A hat. Dann enthalten die Intervalle $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ für jedes standard $\epsilon > 0$ diesen Punkt $p \in A$ und daher enthalten sie zu jedem standard ϵ auch einen standard Punkt aus A. Das erzeugt eine unendliche Folge, die gegen x konvergiert und daher liegt x in A, weil A abgeschlossen ist.

(2) Es sei A eine standard Menge, die s-abgeschlossen ist. Dann hat jeder standard Punkt im Komplement von A eine Monade, die ganz in dem Komplement liegt (wegen der s-Abgeschlossenheit von A). Also ist das Komplement offen und daher A abgeschlossen.

Aufgabe 11. Da f standard Funktion ist und das Intervall auch als standard vorausgesetzt wird, genügt es zur Berechnung des Integrales ausschließlich standard endliche Partitionen des Intervalles zu betrachten. Die ausreichende Partition ist aber automatisch Verfeinerung von allen diesen Partitionen, weil sie ja alle standard Punkte enthält. Zu einem beliebigen standard $\epsilon > 0$ wählen wir eine standard endliche Partition $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$, für welche der Ausdruck $\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i)(y_i - y_{i-1})$ mit Zwischenstellen ξ_i weniger als $\epsilon/2$ von $\int_a^b f(x)dx$ abweicht. Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{N} f_i \Delta x_i$ ist aber eine Verfeinerung jener Partition und daher auch weniger als $\epsilon/2$ von dem Wert des Integrales entfernt. Wenn wir noch den Standardteil berücksichtigen, der den Wert nur infinitesimal verändert, so daß wir diesen Fehler ebenfalls immer durch $\epsilon/2$ abschätzen können, dann sehen wir daß das s-Integral vom herkömmlichen Integral sich um weniger als beliebige standard ϵ unterscheidet, also um eine Infinitesimale, aber für zwei standard Zahlen heißt das, daß sie gleich sind.

Aufgabe 12. $f'(x)$ an einer standard Stelle x ist definiert als Grenzwert der Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ bei $h \to 0$. Es gilt dann, daß für alle infinitesimalen $h \neq 0$ gilt $f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. Wenn die standard Stelle x mit dem Partitionspunkt x_j übereinstimmt, dann folgt daraus $^\circ\left(\frac{\Delta f_j}{\Delta x_j}\right) = f'(x)$. Da die Ableitung f' nach Voraussetzung stetig ist und daher auch s-stetig, folgt, daß die Differenzenquotienten $\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}$ auf jeder Monade durch die Ableitung an einer Zwischenstelle ersetzbar sind (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) also einen Ausdruck, der nach Voraussetzung fast gleich dem Wert an der standard Stelle in dieser Monade ist. Also ist $f_{\bullet}$ tatsächlich s-differenzierbar.

Abschließende Bemerkung: Man sieht hier, wie bei diesem Übersetzungsvorgang ein großer Teil des Vorteils und der Einfachheit der nonstandard Betrachtung wieder verloren geht, weil man die gesamte herkömmliche Darstellung im Griff haben muß. Die wirklichen Vorteile würde man erst ernten können, wenn man systematisch aus dem nonstandard Blickwinkel arbeitet und die klassische Version erst daraus ableitet.