DIVERSE AUFGABEN

1. ALLGEMEINE BEMERKUNGEN

In der täglichen Praxis werden kaum jemals die Formeln der formalisierten Theorie (**ZFC**) verwendet, es sei denn um eine Unklarheit aus dem Weg zu räumen. Umso wichtiger ist es, den Unterschied zwischen der vollen Sprache und der reinen Mengensprache zu beachten. Wendungen wie „die Menge aller standard Elemente, welche ...“ oder „die Menge aller Punkte, die infinitesimal nahe liegen bei ...“ führen zu gravierenden Fehlern, weil Separation ja für die volle Sprache (unter Einschluß von st) **nicht** gilt.

Um einen Anschein von Separation aufrecht zu erhalten, kann man in solchen Situationen von „externen Mengen“ oder „Bereichen“ sprechen (für welche jedoch die Axiome von **ZFC** nicht zutreffen). Hingegen sind alle Prädikate, die aus der herkömmlichen Mathematik bekannt sind, in der $\in$ -Sprache ausdrückbar, also für Separation zulässig. Eine tatsächliche Übersetzung solcher Prädikate in $\in$ -Sprache ist überflüssig, das Argument kann ohne Bedenken in natürlicher Sprache formuliert werden.

Es zeigt sich, daß die Beweise besonders einfach werden, wenn man sich dem jeweiligen Problem in einer betont „schlichten“ Weise nähert, weil die nonstandard Argumente ja alle auf der Annahme beruhen, daß man unendliche Mengen „finitisieren“ kann. Wenn man mit den üblichen abstrakten Vorstellungen an die Sachen herangeht, verheddert man sich unter Umständen in konfusen Überlegungen.

Im nächsten Abschnitt werden einige Musterbeispiele gegeben.

2. MUSTERBEISPIELE

Es sei nochmal erinnert an die externe Struktur von $\mathbb{R}$: es gibt zwei externe Bereiche, die *begrenzten Zahlen* (x heißt begrenzt wenn $\exists^{st} C |x| < C$) und die *unbegrenzten*. Der Bereich der begrenzten Zahlen zerfällt weiter in die *infinitesimalen* ($x \approx 0$) und die *nichtinfinitesimalen* ($\exists^{st} c > 0 |x| > c$) Zahlen. $x \ll y$ bedeutet, daß $x < y$ ist und zusätzlich $x \not\approx y$, während $x \lesssim y$ bedeutet, daß $x < y$ oder $x \approx y$ ist, wobei im letztgenannten Fall $y \leq x$ sein kann. Jede begrenzte Zahl r hat einen Standardteil, der durch ${}^\circ r$ bezeichnet wird, dies ist die eindeutig bestimmte standard Zahl s , für welche gilt, daß $r \approx s$. Die externe Menge aller Zahlen infinitesimal nahe bei einer Zahl r heißt *Monade* von r und wird meist durch $\mu(r)$ bezeichnet (keine Menge!!!). Wenn und nur wenn eine Monade begrenzt ist, enthält sie eine standard reelle Zahl.

2.1. Die Interaktion von ${}^\circ$ mit Ungleichungen.

Beispiel 1. Für je zwei Monaden $\mu(x)$ und $\mu(y)$ gilt: $\mu(x)$ liegt zur Gänze links von $\mu(y)$, oder beide Monaden sind gleich, oder $\mu(x)$ liegt zur Gänze rechts von $\mu(y)$.

Beweis. Angenommen die beiden Monaden haben einen nicht leeren Durchschnitt. Sei daher $z \approx x$ und $z \approx y$, dann ist wegen der Transitivität von $\approx$ auch $x \approx y$, das

heißt die beiden Monaden sind gleich. Sind die beiden Monaden hingegen disjunkt, dann muß aus $x < y$ folgen, daß $\mu(x) < \mu(y)$ (d.h. jedes Element der ersten ist $<$ als jedes der zweiten Monade). Entsprechendes gilt bei $y < x$. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Beispiel 2. Aus $x < y$ und x, y begrenzt folgt, daß ${}^\circ x \leq {}^\circ y$.

Beweis. Wenn x, y beide begrenzt sind, besitzen beide einen Standardteil. Aus dem vorangehenden Beispiel folgt, daß entweder die Monaden gleich sind, d.h. ${}^\circ x = {}^\circ y$, oder daß ${}^\circ x < {}^\circ y$. $\square$

Beispiel 3. Aus $x \lesssim y$ und x, y begrenzt folgt, daß ${}^\circ x \leq {}^\circ y$.

Beweis. Hier muß man unterscheiden zwischen dem Fall, daß $x < y$ ist, für den die Behauptung schon bewiesen ist, und dem Fall, daß $x \approx y$, der auf ${}^\circ x = {}^\circ y$ führt. $\square$

Beispiel 4. Aus $x \ll y$ und x, y begrenzt folgt, daß ${}^\circ x < {}^\circ y$.

Beweis. Aus dem vorangehenden Ergebnis folgt, daß ${}^\circ x \leq {}^\circ y$, aber das Gleichheitszeichen ist ausgeschlossen, weil $y - x$ durch eine positive (sogar standard) Zahl nach unten abgeschätzt ist. $\square$

2.2. Folgen und Summen. Auch bei den (endlichen) Summen erzeugt das Prädikat st neue Begriffe, die es in der Mengensprache nicht gibt (und nicht geben kann). Eine endliche Folge bzw. eine Summe wird hier *lang* genannt, wenn sie sich bis zu einem nonstandard (Summations-) Index erstreckt. Damit soll betont werden, daß die (unorthodoxe) Interpretation durchaus nicht auf „unendliche“ Zahlen zielt, sondern auf außerordentlich große Zahlen, von denen wir annehmen, daß sie sich unter den üblichen Operationen wie die überschaubaren Zahlen verhalten. Die Rechtfertigung einer solchen (unorthodoxen) Interpretation liegt in der Äquikonsistenz des damit verknüpften logischen Kalküls relativ zu dem der Mengenlehre.

Um eine von der Wahl des Folgenindex unabhängige Bezeichnung für Folgen zu haben, wird hier für Folgen die Schreibweise $a_.$ verwendet werden. Der größte Index der endlichen Folge wird durch $a_{.N}$ kenntlich gemacht werden. Um ermüdende Ausdrücke wie „ein Folgenglied mit standard Index“ zu vermeiden, werden wir solche Folgenglieder *nahe* Glieder und die mit nonstandard Index *ferne* Glieder nennen. (Folgenglieder mit standard Index brauchen nicht standard zu sein und solche mit nonstandard Index können auch schon mal standard sein! Für das Gemeinte zu sagen „ein standard Folgenglied“ ist daher falsch!)

Definition 2.1. Der *Standardschatten* einer Folge. Eine lange Folge $a_.$, deren nahe Glieder alle begrenzt sind, erzeugt eine standard unendliche Folge mittels Standardisierung: die standard Folge, deren nahe Glieder definiert sind als die Standardteile der nahen Glieder von $a_.$ Als Bezeichnung für den Standardschatten wird hier ${}^{(\circ)}a_.$ verwendet. Die spitzen Klammern dienen dazu, Verwechslung mit dem gewöhnlichen Standardteil einer Zahl zu vermeiden: ${}^{(\circ)}a_M$ für einen großen Index M ist nämlich ganz etwas anderes als ${}^\circ a_M$. Die standard Folge ${}^{(\circ)}a_.$ ist also nichts anderes als die standard Menge aller geordneten Paare, die durch die standard Paare $\langle i, {}^\circ a_i \rangle$ festgelegt wird. Ob z.B. ${}^{(\circ)}a_M$ tatsächlich der Standardteil der Zahl a_M ist, bleibt offen, meistens ist er es nicht!

Beispiel 5. Als einfaches Beispiel kann die Folge $a_i := 1 + N^{(\lfloor 2i/N \rfloor - 1)}$ für $i \leq N$ und großes N dienen ($\lfloor r \rfloor$ steht für die nächstkleinere ganze Zahl). Für alle nahen Glieder gilt ${}^\circ a_i = 1$. Die standard unendliche Folge deren nahe Glieder alle gleich 1 sind ist die standard unendliche Folge ${}^{(\circ)} a_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Aber für $i > N/2$ ist $a_i = 2$.

Es lohnt sich an dieser Stelle die herkömmliche Konvergenzdefinition für eine Folge anders zu formulieren. Unter einem *Endabschnitt* der natürlichen Zahlen verstehen wir jede Menge der Form $E_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ und unter einem Anfangsabschnitt jede Menge der Form $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq k\}$. Beide sind durch Angabe einer natürlichen Zahl (hier: k) bestimmt. Eine unendliche Folge a , heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jeder natürlichen Zahl k einen Endabschnitt E der natürlichen Zahlen gibt, auf dem die Folgenglieder um weniger als $\frac{1}{k+1}$ schwanken. Die Folge hat den Limes r , wenn es zu jeder natürlichen Zahl k einen Endabschnitt E der natürlichen Zahlen gibt, auf dem die Folge um weniger als $\frac{1}{k+1}$ von r abweicht. Wenn also eine Folge keine Cauchy-Folge ist, heißt das, daß es eine natürliche Zahl k gibt, so daß auf jedem Endabschnitt E die Folge um mindestens $\frac{1}{k+1}$ schwankt.

2.3. Das Überschußprinzip. Zur Erinnerung: wenn eine Menge in einem strikt externen Bereich enthalten ist, gibt es in diesem Bereich Elemente, die nicht in der Menge liegen; wenn eine strikt externer Bereich in einer Menge liegt, gibt es in der Menge Elemente, die nicht dem externen Bereich angehören. Stets muß nachgewiesen sein, daß der Bereich wirklich extern ist, also nicht zu den Mengen gehört. Die Tatsache, daß er in st- $\in$ -Sprache definiert ist, reicht nicht aus, wie das folgende Beispiel zeigt: der Bereich aller natürlichen Zahlen, die entweder standard oder nichtstandard sind. Hier ist in der Definition st verwendet worden und dennoch handelt es sich schlicht um die Menge der natürlichen Zahlen. Bei unendlichen Mengen ist aber stets der Bereich der standard Elemente der Menge ein strikt externer Bereich.

Beispiel 6. Der externe Anfangsabschnitt der natürlichen Zahlen

$$\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : \text{st}(n)\}$$

und der externe Endabschnitt

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N} : \neg \text{st}(n)\}.$$

Wenn eine Menge den externen Anfangsabschnitt umfaßt, enthält sie nonstandard Zahlen, wenn eine Menge den externen Endabschnitt umfaßt enthält sie standard Zahlen.

Lemma 2.2. (*Robinsons Lemma*) Wenn eine beliebige Folge a , auf dem externen Anfangsabschnitt infinitesimal ist, gilt dies für einen nonstandard Anfangsabschnitt (d.h. für ein A_K mit großem K)

3. AUFGABEN

Aufgabe 1. Warum ist folgendes Argument zum Beweis von Robinsons Lemma falsch? Die Menge der Indizes für welche die Folgenglieder infinitesimal sind umfaßt den externen Anfangsabschnitt, also enthält diese Menge nonstandard Zahlen. Erläutere, wie der (korrekte) Beweis das Überschußprinzip korrekt einsetzt.

¹ $k + 1$ im Nenner soll den Fall $k = 0$ unschädlich machen.

3.1. Folgen.

Definition 3.1. S-konvergente Folgen: eine lange oder eine unendliche Folge a , heißt *s-konvergent*, wenn alle fernen Glieder in einer begrenzten Monade liegen. Die standard reelle Zahl r in dieser Monade heißt *s-Limes* der Folge, also $r = {}^\circ a_M$ für beliebigen großen Index M .

Theorem 3.2. *Eine standard unendliche Folge a , in den reellen Zahlen ist eine Cauchy-Folge mit Limes r genau dann, wenn ein beliebiger, langer Anfangsabschnitt der Folge s-konvergent mit s-Limes r ist.*

Beweis. (1) Es sei a , eine standard unendliche, konvergente Folge mit Limes r . Wegen Transfer gibt es zu jeder standard Zahl k einen standard Endabschnitt E auf dem die Folge um weniger als $\frac{1}{k+1}$ schwankt. Es sei $\mathcal{E}$ der Endabschnitt der großen Zahlen (das ist **keine** Menge, weil nicht in der $\in$ -Sprache definiert!). Dieser ist in allen standard Endabschnitten (alle Abschnitte der Form $\{n \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ mit einem standard k) enthalten. Also ist die Schwankung der Folge auf $\mathcal{E}$ kleiner als $\frac{1}{k+1}$ für jedes standard k , d.h. infinitesimal. Das aber heißt einfach $a_M \approx a_N$ für alle großen M, N . Da für jedes standard k die Abweichung von r auf einem standard Endabschnitt E kleiner als $\frac{1}{k+1}$ wird, ist sie auf $\mathcal{E}$ kleiner als alle diese Brüche, also infinitesimal. Daher liegt r in der Monade von a_M , so daß diese Monade begrenzt ist (z.B. durch die standard Zahl $r + 1$).

(2) Es sei jetzt vorausgesetzt, daß die fernen Glieder begrenzt und $a_M \approx a_N$ für beliebige, große Indizes $M, N \leq K$ sind. Also gilt für alle nonstandard Endabschnitte E (d.h. $\{n \in \mathbb{N} : M \leq n \leq K\}$ mit nonstandard M denn wir betrachten nur Indizes $\leq K$), daß auf ihnen die Schwankung infinitesimal und daher kleiner als $\frac{1}{i+1}$ für ein beliebiges standard i ist. Das gilt aber dann auch noch für einen standard Endabschnitt, der mit standard m beginnt (Überschußprinzip). Das aber zeigt, daß die Konvergenzdefinition für standard Indizes erfüllt ist, und da a , standard ist, gilt die Konvergenz gemäß Transfer allgemein. Ein entsprechendes Argument zeigt, daß die Folge gegen r konvergiert. $\square$

Aufgabe 2. Warum kann man die Argumente des vorangehenden Theoremes nicht auf die Folge aus dem Beispiel 5 anwenden?

Aufgabe 3. Definiert die folgende Definition eine Folge (d.h. eine Menge von Zuordnungspaaren)?

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \text{st}(i) \\ 0 & \text{wenn } \neg \text{st}(i) \end{cases} .$$

Aufgabe 4. Es sei a , eine standard Cauchy-Folge. Zeige, daß die ganze Folge begrenzt ist, ohne die Existenz eines Grenzwertes zu benutzen.

Aufgabe 5. Gegeben sei eine lange Folge a ,, deren ferne Glieder alle in einer Monade liegen und deren nahe Glieder alle begrenzt sind. Zeige, daß die Monade, in der die fernen Glieder alle liegen, notwendigerweise begrenzt ist.

3.2. Reihen. Wie bei den Folgen sind endliche, aber lange Reihen die Gegenstücke zu den unendlichen Reihen der Mengenlehre. Eine unendliche Reihe ist keine Summe, denn unendlich viele Summanden lassen sich nicht summieren, sondern es handelt sich um den Grenzwert der Partialsummen, sofern ein solcher existiert.

Hier nun handelt es sich um eine „endliche“ Reihe (ein idealisiertes Objekt, das man sich aber tatsächlich als eine Summe mit sehr vielen Summanden vorstellen kann). Eine solche hat natürlich immer eine Summe, so daß scheinbar nichts dem Begriff Konvergenz einer Reihe entspricht. Das täuscht aber: eine solche lange Reihe hat zwar immer eine Summe, aber die kann begrenzt oder unbegrenzt sein. Der Begriff der s -Konvergenz bei (endlichen) Folgen überträgt sich hier.

Definition 3.3. Eine lange Reihe $\sum_{i=0}^N a_i$ heißt *s-konvergent*, wenn alle langen Summen $\sum_{i=0}^M a_i$ für große $M \leq N$ in einer begrenzten Monade liegen. Die standard Zahl in dieser Monade heißt s -Summe der langen Reihe. Eine lange Reihe heißt *absolut s-konvergent*, wenn die aus $|a_i|$ gebildete Reihe s -konvergent ist. Eine lange Reihe heißt *bedingt s-konvergent*, wenn die Reihe s -konvergent, aber nicht absolut s -konvergent ist.

Aufgabe 6. Angenommen die Summanden $\{a_i\}_{i=0}^N$ stammen aus einem nonstandard Anfangsabschnitt einer unendlichen standard Folge a_i . Zeige, daß aus der s -Konvergenz der langen Reihe $\sum_{i=0}^N a_i$ mit der s -Summe $\circ \sum_{i=0}^N a_i$ die Konvergenz der unendlichen Reihe folgt und $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \circ \sum_{i=0}^N a_i$.

Aufgabe 7. Zeige, daß die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergent ist.

3.3. Die Exponentialfunktion. Die Funktion $\exp_N(x) = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ ist für begrenzte x bis auf Infinitesimale gleich der herkömmlichen Exponentialfunktion $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Diese Darstellung (in einem gewissen Sinn analog zu einer Darstellung von π durch einen endlichen Dezimalbruch) erlaubt es, sehr leicht die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion herzuleiten.

Aufgabe 8. Berechne das Produkt $\exp_N(x)\exp_N(y)$ für begrenzte x und y bis auf Infinitesimale genau.

3.4. Elementare Topologie. Die elementare Topologie ist in der $st\text{-}\in$ -Sprache ohne Umschreibungen unmittelbar ausgedrückt, nämlich durch den Begriff der infinitesimalen Umgebung, oder Monade, wie wir das genannt haben. Immer wenn Monaden in den Argumenten auftauchen, ist etwas Topologisches angesprochen. Man braucht das eigentlich nicht eigens herauszupräparieren, aber um die Beziehung deutlicher zu sehen, werden nachstehend die fundamentalen topologischen Begriffe der $\in$ -Sprache in die volle Sprache übersetzt.

Definition 3.4. Eine beliebige Menge heißt *s-offen*, wenn sie mit jedem standard Punkt auch die ganze Monade dieses Punktes umfaßt.

Aufgabe 9. Zeige, daß eine standard Menge genau dann offen ist, wenn sie s -offen ist.

Aufgabe 10. Gib die entsprechende Definition von s -abgeschlossen für die Komplemente von s -offenen Mengen an und zeige, daß eine standard Menge dann und nur dann abgeschlossen ist, wenn sie s -abgeschlossen ist.

3.5. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung. Wir betrachten ein beliebiges, abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit einer ausreichenden Partition, d.h. eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

bei der alle standard Punkte unter den Teilungspunkten vorkommen.

Es sei f eine reellwertige Funktion auf dem Intervall. Wir setzen $f_i := f(x_i)$. Wir definieren Δ als Operator auf den „diskreten Wertetabellen“: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ und dementsprechend $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Trivialerweise gilt $\sum_{i=1}^N \Delta x_i = b - a$ und $\sum_{i=1}^N \Delta f_i = f_N - f_0$. Daraus folgt die ebenso triviale Formel

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} \Delta x_i = f_N - f_0 = f(b) - f(a).$$

Das ist der Kern des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, an dem so mancher Student verzweifelt. Indem wir diese algebraische Trivialität mit einer ausreichenden Partition in den Kontext von **BS**T setzen, verschieben wir das Ergebnis in den Bereich der Analysis.

Definition 3.5. Die Diskretisierung f heißt *s-differenzierbar*, wenn für alle x_i aus einer beliebigen Monade in dem Intervall gilt, daß $\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}$ nur Werte aus einer begrenzten Monade annimmt, die Steigungen also innerhalb einer begrenzten Monade nur infinitesimal schwanken. Die s-Ableitung f'_i von f ist dann $f'_i := \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}$.

Als nächstes geben wir eine Definition des s-Integrales einer diskreten Funktion:

Definition 3.6. Das *s-Integral* einer Diskretisierung f ist gegeben durch

$$\mathcal{S}_i f_i \Delta x_i := \sum_{i=1}^N f_i \Delta x_i.$$

Dieser Ausdruck ist stets begrenzt, wenn f_i für alle i durch eine standard Zahl C begrenzt ist, denn dann gilt $\left| \sum_{i=1}^N f_i \Delta x_i \right| \leq C(b - a)$.

Damit können wir folgendes „Theorem“ formulieren:

Theorem 3.7. Für jede s-differenzierbare Diskretisierung f gilt der „Hauptsatz der Infinitesimalrechnung“: für jede s-differenzierbare diskrete Funktion f gilt

$$\mathcal{S}_i f'_i \Delta x_i = f(b) - f(a).$$

Aufgabe 11. Zeige, daß für eine standard stetige Funktion f und ihre Diskretisierung (bezüglich einer ausreichenden Partition des als standard vorausgesetzten Intervalles $[a, b]$) f folgende Beziehung gilt: $\circ \mathcal{S}_i f_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$.

Aufgabe 12. Für eine standard, stetig differenzierbare Funktion f auf dem standard Intervall $[a, b]$ ist bei ausreichender Partition die Diskretisierung s-differenzierbar und es gilt für alle standard Punkte x , daß $f'(x) = \circ f'_j = \circ \frac{\Delta f_j}{\Delta x_j}$, wobei $x_j = x$.

Damit ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf den „Hauptsatz der Infinitesimalmathematik“ zurückgeführt und trivialisiert. Man kann gut verstehen, warum Leibniz diese *façon de parler* der anderen vorgezogen hat.