Kohomologie von Periodenbereichen über endlichen Körpern

Sascha Orlik

Zusammenfassung

Periodenbereiche sind gewisse offene Unterräume von verallgemeinerten Flaggenvarietäten, welche durch Semistabilitätsbedingungen beschrieben werden. In dem Fall eines endlichen Grundkörpers bilden diese eine Zariski-offene Untervarietät, im Fall eines lokalen Körpers einen zulässigen offenen Unterraum im Sinne der rigiden algebraischen Geometrie. In dieser Arbeit berechnen wir für den Fall eines endlichen Grundkörpers die ℓ-adische Kohomologie mit kompaktem Träger dieser Periodenbereiche
.

Einleitung

Der Begriff des Periodenbereiches wurde von Griffiths [7] eingeführt. Diese Objekte stellen gewisse offene Untermengen von verallgemeinerten Flaggenvarietäten über $\mathbb{C}$ dar, welche polarisierte $\mathbb{R}$-Hodgestrukturen eines gegebenen Typs parametrisieren. Hierdurch motiviert hat Rapoport in [17] Periodenbereiche über p-adischen beziehungsweise endlichen Körpern definiert. Wir wollen die letztere Variante kurz erläutern. Sei dazu k ein endlicher Körper. Ein filtrierter k-Vektorraum ist ein Paar $(V, \mathcal{F}^\bullet)$ bestehend aus einem endlichdimensionalen k-Vektorraum V und einer $\mathbb{R}$-Filtration $\mathcal{F}^\bullet$ auf V, welche über einer endlichen Körpererweiterung von k definiert ist. Analog zu dem Fall von Vektorbündeln auf einer Kurve existiert der Begriff des Anstieges. Für einen filtrierten Vektorraum $V = (V, \mathcal{F}^\bullet) \neq 0$ ist dieser definiert durch

$$\mathrm{slope}(V) = \mathrm{slope}_{\mathcal{F}^\bullet}(V) = \frac{\sum_x x \dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(V)}{\dim V}.$$

Entsprechend heißt eine Filtration semistabil, wenn für jeden nicht trivialen k-rationalen Unterraum U die Ungleichung $\mathrm{slope}(U) \leq \mathrm{slope}(V)$ erfüllt ist.

[0]1991 Mathematics Subject Classification: Primary 14D25; Secondary 14F20

Dabei ist der Unterraum U mit der induzierten Filtration versehen. Man betrachtet nun numerierte Filtrationen eines gegebenen Typs auf einem k-Vektorraum V, d.h. man fixiert eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit endlichem Träger und läßt nur solche Filtrationen $\mathcal{F}^\bullet$ auf V zu, für die $\dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(V) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Diese lassen sich durch eine über k definierte Flaggenvarietät $\mathscr{F}_g$ parametrisieren. Der Unterraum der semistabilen Filtrationen heißt dann der zu g gehörige Periodenbereich und wird mit $\mathscr{F}_g^{ss}$ notiert [17]. Bei diesem Raum handelt es sich um einen offenen Teilraum von $\mathscr{F}_g$. Somit ist er mit der Struktur einer über k definierten Varietät versehen. In der Situation eines p-adischen Grundkörpers k betrachtet man anstatt filtrierter Vektoräume filtrierte Isokristalle über k, für die analog der Begiff des Anstieges existiert. Hier entsprechen die semistabilen Objekte vom Anstieg 0 genau den schwach zulässigen Isokristallen (vgl. [20]) aus der Fontainschen Theorie (vgl. [5]). Die Theorie der Periodenbereiche läßt sich sowohl für endliche als auch für p-adische Grundkörper auf den Fall von beliebigen reduktiven Gruppen verallgemeinern.

Das prominenteste Beispiel eines Periodenbereiches ist der sogenannte Drinfeldsche Halbraum Ω^d der Dimension $d-1$. Dieser ist im Falle eines endlichen Grundkörpers k das Komplement aller k-rationalen Hyperebenen im projektiven Raum $\mathbb{P}_k^{d-1}$, d.h. es ist

$$\Omega^d = \mathbb{P}_k^{d-1} \setminus \bigcup_{\substack{H \subset k^d \\ \dim H = d-1}} \mathbb{P}(H).$$

Dieser Raum ist im Gegensatz zu den meisten Periodenbereichen sogar affin. In der p-adischen Situation hat man bei diesem Beispiel lediglich den Grundkörper k durch den entsprechenden lokalen Körper zu ersetzen. Eine ausführliche Beschreibung dieser p-adischen Variante des Drinfeldschen Halbraumes wird in der Arbeit [22] diskutiert. Es sei schließlich erwähnt, daß es wohl keinen allgemeinen Zusammenhang der Periodenbereiche zu den Deligne-Lusztig-Varietäten [3] gibt, obgleich man den Drinfeldschen Halbraum als eine solche beschreiben kann (vgl. [3] 2.2).

Ein natürliches Anliegen ist es, die Kohomologie der Periodenbereiche für beliebige reduktive Gruppen G zu kennen. Dabei verstehen wir unter der Kohomologie die ℓ-adische Kohomologie mit kompaktem Träger. Die Periodenbereiche sind im allgemeinen Fall erst über einer endlichen Körpererweiterung E des Grundkörpers definiert. Die Kohomologiegruppen sind dann auf natürliche Weise mit Operationen sowohl von der Gruppe $G(k)$, für k endlich, (bzw. $J(k)$, im Fall eines lokalen Köpers k) als auch der Galoisgruppe $Gal(\overline{E}/E)$ versehen. Dabei bezeichnet J eine gewisse innere Form der Gruppe G. In der p-adischen Variante wurde die ℓ-adische Kohomologie des Drinfeldschen Halbraumes in [22] berechnet. Es gilt

$$H_c^*(\Omega^d, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} v^G_{P_{(d-i,1,\ldots,1)}}(i+1-d)[-2(d-1)+i],$$

wobei $P_{(d-i,1,\ldots,1)}$ die der Partition $(d-i,1,\ldots,1)$ entsprechende standard-parabolische Untergruppe der GL_d ist und v_P^G, für $P \subset G$ parabolisch, die Darstellung $Ind_{P(k)}^{G(k)}\mathbb{Q}_\ell / \sum_{P \subsetneq Q} Ind_{Q(k)}^{G(k)}\mathbb{Q}_\ell$ bezeichnet (vgl. [22]). Die Notation $[-n], n \in \mathbb{N}$, bedeutet hierbei, daß der voranstehende Modul in den Grad n des Kohomologieringes geshiftet wird. Unter der Bezeichnung $(m), m \in \mathbb{Z}$, verstehen wir den m-fachen Tate-Twist. Die Formel ist ebenso im Fall eines endlichen Grundkörpers gültig.

Für beliebige Periodenbereiche haben Kottwitz und Rapoport Formeln für die Euler-Poincaré-Charakteristik bzgl. der Grothendieck-Gruppe von $G(k) \times Gal(\overline{E}/E)$- (bzw. $J(k) \times Gal(\overline{E}/E)$-) Darstellungen hergeleitet (vgl. [17]-[19]). Das Hauptresultat dieser Arbeit verallgemeinert die obige Formel im Fall $G = GL(V)$ für endliche Grundkörper k. Sie bestätigt eine Vermutung von Kottwitz und Rapoport. Der Beweis ist allerdings völlig anders als der von Rapoport und Kottwitz für die Euler-Poincaré-Formel.

Wir wollen das Ergebnis nun erläutern. In unserem Fall ist $E = k$. Bezeichne mit W die Weylgruppe von G bezüglich des Diagonaltorus T. Es sei $\mu = \mu_g = (x_1^{g(x_1)}, \ldots, x_r^{g(x_r)}) \in X_*(T)_\mathbb{R}$ der zu g assoziierte reelle Cocharakter, wobei supp(g)=$\{x_1 > \ldots > x_r\}$ den Träger von g darstellt. Ferner sei W_μ der Stabilisator von μ in W und W^μ die Menge der Kostant-Repräsentanten von W/W_μ. Sei Δ die zur Borelgruppe B der oberen Dreiecksmatrizen gehörige Wurzelbasis. Seien $\omega_\alpha, \alpha \in \Delta$, die assoziierten Fundamentalgewichte. Ordnet man jedem $w \in W^\mu$ die Teilmenge $\Delta_w = \{\alpha \in \Delta; \langle w\mu, \omega_\alpha \rangle \ > 0\}$ von Δ zu, so lautet unsere Formel für die Kohomologie:

Satz: $\quad H_c^*(\mathcal{F}_g^{ss}, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{w \in W^\mu} v^G_{P_w}(-l(w))[-2l(w) - \#\Delta_w].$

Hierbei notieren wir mit P_w diejenige standard-parabolische Untergruppe, deren unipotentes Radikal von Δ_w erzeugt wird. Für ein $w \in W$ mit $\Delta_w = \Delta$ erhalten wir somit die Steinberg-Darstellung v_B^G. Anders als die Steinberg-Darstellung sind die $v_{P_w}^G$ jedoch im allgemeinen nicht mehr irreduzibel. Es ist zu vermuten, daß die obige Formel auch für beliebige reduktive Gruppen und auch für die p-adische Situation gilt. Wie man der Formel entnimmt, ist die Kohomologie der Periodenbereiche im allgemeinen nicht mehr rein.

Jedes $w \in W^\mu$ induziert einen Beitrag zur Kohomologie, welcher sich im Grad $2l(w) + \#\Delta_w$ des Kohomologieringes befindet. Dabei verhalten sich diese beiden Summanden bezüglich der Bruhatordnung auf W gegenläufig, d.h. aus $w' \leq w$ folgt $l(w') \leq l(w)$, aber $\Delta_w \subset \Delta_{w'}$. Deswegen kann es, anders als bei der Kohomologie von Flaggenvarietäten, durchaus passieren, daß für $w' \leq w$ der induzierte Grad von w' größer als derjenige von w ist. Trotzdem läßt sich, wie Rapoport bemerkt hat, aus der Formel ein Verschwindungssatz ableiten.

Korollar: *Für den zu g assoziierten Periodenbereich $\mathcal{F}_g^{ss}$ ist*

$$H_c^i(\mathcal{F}_g^{ss}, \mathbb{Q}_\ell) = 0, \quad 0 \leq i \leq d-2$$

und

$$H_c^{d-1}(\mathcal{F}_g^{ss}, \mathbb{Q}_\ell) = v_B^G.$$

Wir wollen nun kurz die Beweisstrategie des obigen Resultats schildern. Eine ausführlichere Beschreibung findet man im Paragraphen 4. Es ist etwas überraschend, daß die Berechnung der Kohomologie mit der Methode dieser Arbeit geglückt ist. Wir schreiben zunächst die Menge der instabilen Punkte in der Flaggenvaritär als endliche Vereinigung von abgeschlossenen Untervarietäten Y_U, die durch die Menge der k-rationalen Unterräume $U \subset V$ parametrisiert werden. Dabei besteht Y_U aus denjenigen Filtrationen, für die der Unterraum U die Semistabilitätsungleichung verletzt. Der nächste natürliche Schritt wäre die Beschreibung sämtlicher Durchschnitte obiger Untervarietäten, um anschließend die Kohomologie mittels der verallgemeinerten Mayer-Vietoris Sequenz zu berechnen. Jedoch ist dies für allgemeines d ein sehr schwieriges Problem. Es ist noch nicht einmal bekannt, für welche $U_1, \ldots, U_r$ der Durchschnitt $Y_{U_1} \cap \ldots \cap Y_{U_r}$ nicht leer ist. Jedoch lassen sich gewisse Durchschnitte beschreiben, mit deren Hilfe man überraschenderweise die Kohomolgie von Y und damit die des offenen Komplementes berechnen kann. Der Punkt ist, daß für ein fixiertes Element x aus der Flaggenvarietät die Menge der U, für die x in Y_U enthalten ist, einen kontrahierbaren Unterkomplex des Tits-Komplexes zu $GL(V)(k)$ induziert. Dieses Phänomen entspricht dem Ergebnis von Mumford über die Konvexität der Menge von Einparameteruntergruppen, welche die Semistabilität verletzen (vgl. [13] 2.2).

Wir kommen nun zur Inhaltsangabe dieser Arbeit. Der Paragraph 1 behandelt die Theorie der numerierten Filtrationen. Wir beschränken uns hierbei auf die im weiteren wichtigen Definitionen und Eigenschaften. Im Paragraphen 2 führen wir Varietäten $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')$ ein, deren Kohomologie wir berechnen wollen. Dabei ist $\mathcal{B}'$ eine Teilmenge einer Menge $\mathcal{B}$ von sogenannten Unterfunktionen von g. Das abgeschlossene Komplement $Y(\mathcal{B}')$ von $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')$ ist die Vereinigung von konstruierbaren Untermengen $Y(h),\ h \in \mathcal{B}'$. Auf der Menge $\mathcal{B}$ definieren wir eine Ordnungsrelation, mit der wir den Abschluß der $Y(h)$ in $\mathcal{F}_g$ beschreiben. Anschließend zeigen wir, daß die Periodenbereiche Spezialfälle der Varietäten $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')$ sind. Im Paragraphen 3 zeigen wir, daß die Ordnung auf $\mathcal{B}$ zu der Bruhatordnung der Weylgruppe von $GL(V)$ korrespondiert. Schließlich beweisen wir die obige Abschlußeigenschaft der Mengen $Y(h)$, indem wir uns auf den Fall von Schubertzellen zurückziehen. Die Hauptresultate der Arbeit werden im Paragraph 4 formuliert. Daraus leiten wir den bereits erwähnten Verschwindungssatz ab. Anschließend diskutieren wir einige Eigenschaften der Kohomologie von Periodenbereichen, wie zum Beispiel die Reinheit. Die Konstruktion des fundamentalen Komplexes von étalen Garben auf $Y(\mathcal{B}')$ findet man im Paragraphen 5. Die Azyklizität dieses Komplexes beweisen wir im Paragraphen 6. Im letzten Paragraphen werten wir schließlich die Spektralsequenz aus, welche durch den azyklischen Komplex induziert wird. Diese Auswertung liefert die gesuchte Kohomologie der Varietäten $Y(\mathcal{B}')$.

An dieser Stelle möchte ich erwähnen, daß es sich bei dieser Arbeit um eine Dissertation der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln handelt. Ich möchte mich recht herzlich bei Prof. Dr. M. Rapoport für die Vergabe und intensive Betreuung dieser Arbeit bedanken. Außerdem möchte ich mich bei T. Fimmel, T. Wedhorn und O. Bültel und U. Görtz bedanken, mit denen ich rege Diskussionen führte und die mir sehr wertvolle Tips gaben.

1 Numerierte Filtrationen

Wir erinnern kurz an einige Begriffe aus der Theorie der numerierten Filtrationen. Als Referenz seien dabei die Arbeiten [17], [18], [4] und [14] erwähnt.

In diesem Paragraphen bezeichnen wir mit k einen beliebigen Körper. Alle auftretenden k-Vektorräume seien hier als endlich-dimensional vorausgesetzt.

Definition 1.1 a) Eine $\mathbb{R}$-Filtration auf einem k-Vektorraum V ist eine monoton absteigende Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\bullet : \mathbb{R} &\longrightarrow \{U; \text{U ist } k\text{-Unterraum von V}\}, \\ x &\longmapsto \mathcal{F}^x \end{aligned}$$

so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) $\mathcal{F}^x = V$ für $x << 0$ bzw. $\mathcal{F}^x = (0)$ für $x >> 0$.

ii) Sei $\mathcal{F}^{x-} := \bigcap_{y<x} \mathcal{F}^y$. Dann ist $\mathcal{F}^{x-} = \mathcal{F}^x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ein filtrierter Vektorraum über k ist ein Paar $(V, \mathcal{F}^\bullet)$ bestehend aus einem k-Vektorraum V und einer $\mathbb{R}$-Filtration $\mathcal{F}^\bullet$ auf V.

Notation 1.2 a) In der Regel geben wir einen filtrierten Vektorraum $(V, \mathcal{F}^\bullet)$ über k nur durch den zugrundeliegenden k-Vektorraum V an. In diesem Fall schreiben wir dann V^x für den Unterraum $\mathcal{F}^x$ von V.

b) Analog zum Teil a),ii) der obigen Definition setzen wir

$$\mathcal{F}^{x+} := \bigcup_{y>x} \mathcal{F}^y, \ x \in \mathbb{R}.$$

Schließlich definieren wir

$$gr^x(V) := gr^x_{\mathcal{F}}(V) := \mathcal{F}^x / \mathcal{F}^{x+}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Es sei bemerkt, daß sich alle üblichen Operationen aus der linearen Algebra auf filtrierte Vektorräume übertragen lassen. Die für diese Arbeit relevanten Operationen behandeln wir im nachfolgenden Beispiel.

Beispiel 1.3 Seien V, W zwei filtrierte Vektorräume, so definieren wir

$$(V \oplus W)^x := V^x \oplus W^x$$

bzw.

$$(V \otimes W)^x := \sum_{y+z=x} V^y \otimes W^z, \ x \in \mathbb{R}.$$

Dadurch erhalten wir sowohl auf der direkten Summe $V \oplus W$ als auch auf dem Tensorprodukt $V \otimes W$ Filtrationen. Bezeichnet andererseits $U \subset V$ einen k-Unterraum von V, so werden durch

$$U^x := U \cap V^x$$

bzw.

$$(V/U)^x := U + V^x/U, \ x \in \mathbb{R}$$

auf dem Unterraum U bzw. auf dem Quotienten V/U Filtrationen definiert. Dabei nennen wir die letztere aus naheliegenden Gründen die Quotientenfiltration. Das sukzessive Anwenden dieser Regeln liefert ebenso Filtrationen auf $V^{\otimes n}$, $Sym^n(V)$ und $\bigwedge^n V, n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.4 Ist U ein Unterraum eines filtrierten Vektorraumes $V = (V, \mathcal{F}^\bullet)$, so versehen wir U, sofern nichts anderes explizit gesagt wird, immer mit der oben definierten induzierten Filtration.

Um von der Kategorie der filtrierten Vektorräume über k sprechen zu können, müssen wir noch die Morphismen zwischen den jeweiligen Objekten angeben.

Definition 1.5 Ein Morphismus $f : (V, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow (V', \mathcal{F}'^\bullet)$ von filtrierten Vektorräumen über k, ist ein k-Homomorphismus $f : V \to V'$ der zugrundeliegenden Vektorräume, so daß $f(\mathcal{F}^x) \subset \mathcal{F}'^x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Wir erhalten somit die Kategorie der filtrierten Vektorräume über k. Diese ist offenbar eine k-lineare Kategorie, welche aber nicht abelsch ist. Trotzdem existieren kurze exakten Sequenzen in ihr. Dies ist durch die nachstehende Definition gewährleistet.

Definition 1.6 Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

von filtrierten Vektorräumen über k ist eine Folge von Morphismen, so daß

$$0 \longrightarrow V'^x \longrightarrow V^x \longrightarrow V''^x \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von k-Vektorräumen ist $\forall x \in \mathbb{R}$.

Wir kommen nun zu den numerischen Invarianten filtrierter Vektorräume. Sei zunächst $V = (V, \mathcal{F}^\bullet)$ ein eindimensionales Objekt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl x_0 mit $gr^{x_0}(V) \neq (0)$. Diese Zahl, welche wir den Grad von V nennen, bezeichnen wir mit

$$\deg_{\mathcal{F}^\bullet} V = \deg V.$$

Allgemein hat man für beliebige filtrierte Vektorräume, in Analogie zu den Vektorbündeln auf einer Riemannschen Fläche, folgende Definition (vgl. [8] 1.1).

Definition 1.7 Sei $V = (V, \mathcal{F}^\bullet)$ ein filtrierter Vektorraum über k. Dann heißt

i) $rk\ V := \dim_k(V)$ der Rang von V,

ii) $\deg V := \deg_{\mathcal{F}^\bullet}(V) := \deg(\bigwedge^{\max} V)$ der Grad von V,

iii) $\mathrm{slope}(V) := \mathrm{slope}_{\mathcal{F}^\bullet}(V) := \dfrac{\deg(V)}{rkV}$ für $V \neq (0)$ der Anstieg oder slope von V.

Dabei bezeichne $\bigwedge^{\max} V = \bigwedge^{\dim V} V$ die maximale äußere Potenz von V.

Es sollen zunächst einige einfache Eigenschaften dieser Invarianten diskutiert werden.

Lemma 1.8 *Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Morphismus von filtrierten Vektorräumen, der auf den zugrundeliegenden Vektorräumen ein Isomorphismus ist. Dann gilt*

$$\deg(V) \leq \deg(W).$$

Beweis: Man reduziert den Fall sofort auf Objekte vom Rang 1, für die die Aussage des Lemmas offensichtlich ist. $\square$

Genauso wie bei den Vektorbündeln, verhält sich der Grad auch in unserer Kategorie additiv.

Lemma 1.9 *Sei* $0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von filtrierten Vektorräumen. Dann gilt*

$$\deg(V) = \deg(V') + \deg(V'').$$

Beweis: Die Wahl eines Schnittes von $V \longrightarrow V''$ liefert eine Isomorphie $V \cong V' \oplus V''$ von filtrierten Vektorräumen. Dabei kann ein solcher Schnitt sukzessive über die Komponenten der Filtrationen von V bzw. V'' konstruiert werden. Es folgt $\bigwedge^{\max} V \cong \bigwedge^{\max} V' \otimes \bigwedge^{\max} V''$. Offenbar folgt dann wegen $\mathrm{rk}(\bigwedge^{\max} V') = \mathrm{rk}(\bigwedge^{\max} V'') = 1$ die Behauptung unmittelbar aus der Definition des Tensorproduktes von filtrierten Vektorräumen. $\square$

Korollar 1.10 *Seien U_1, U_2 Unterräume eines filtrierten Vektorraumes V. Dann gilt*

$$\deg(U_1 + U_2) \geq \deg(U_1) + \deg(U_2) - \deg(U_1 \cap U_2).$$

Beweis: Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U_1 \cap U_2 \longrightarrow U_1 \oplus U_2 \longrightarrow (U_1 + U_2)' \longrightarrow 0$$

von filtrierten Vektorräumen. Dabei bezeichnet $(U_1 + U_2)'$ den Unterraum $U_1 + U_2$ zusammen mit der Quotientenfiltration, die durch den Homomorphismus $U_1 \oplus U_2 \longrightarrow U_1 + U_2$ gegeben wird (vgl. Beispiel 1.3). Nun induziert aber die Identität auf $U_1 + U_2$ einen Morphismus $(U_1 + U_2)' \longrightarrow U_1 + U_2$. Nach Lemma 1.8 gilt also $\deg((U_1 + U_2)') \leq \deg(U_1 + U_2)$. Aus Lemma 1.9 resultiert dann aber sofort die Behauptung. □

Wie schon im Fall eines eindimensionalen Objektes, beschreiben die Sprungstellen den Grad einer Filtration. Genauer gesagt gilt folgendes Resultat.

Proposition 1.11 *Sei V ein filtrierter Vektorraum über k. Dann gilt*

$$\deg V = \sum_x x \dim gr^x(V).$$

Beweis: Da sich beide Ausdrücke additiv bzgl. exakter Sequenzen verhalten, ergibt sich die Behauptung leicht durch vollständige Induktion. □

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch die Definition einer semistabilen Filtration angeben. Diese Definition ist wiederum völlig analog zu dem Begriff der Semistabilität eines Vektorbündels auf einer Riemannschen Fläche ([8]). Bezeichnet W einen beliebigen k-Vektorraum und ist K/k eine Körpererweiterung, so setzen wir zur Abkürzung $W_K := W \otimes_k K$.

Definition 1.12 Sei K/k eine Körpererweiterung und V ein k-Vektorraum. Sei $\mathcal{F}^\bullet$ eine $\mathbb{R}$-Filtration auf V_K. Die Filtration $\mathcal{F}^\bullet$ heißt semistabil genau dann wenn die Ungleichung

$$\text{slope}(U_K) \leq \text{slope}(V_K)$$

für jeden k-rationalen Unterraum $U \neq (0)$ von V erfüllt ist.

Der Grund, daß man in der obigen Definition Körpererweiterungen K/k betrachtet, liegt in der Trivialität des Semistabilitätsbegriffes im Fall $K = k$. In dieser Situation sind nämlich genau diejenigen Filtrationen semistabil, welche genau eine Sprungstelle aufweisen.

2 Die Untervarietäten $\mathscr{F}_g(\mathcal{B}')$ und $Y(\mathcal{B}')$

Von nun an setzen wir voraus, daß unser Grundkörper ein endlicher Körper ist, d.h. es ist $k = \mathbb{F}_q$ für eine Primzahlpotenz $q \in \mathbb{N}$.

Wir fixieren einen k-Vektorraum V der Dimension $d \geq 1$. Außerdem fixieren wir eine Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

mit

$$\sum_x g(x) = d \ \text{ und } \ \sum_x xg(x) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß die Funktion g einen endlichen Träger besitzt. Dem Paar (V, g) läßt sich eine über k definierte projektive Varietät $\mathscr{F}_g = \mathscr{F}_g(V)$ zuordnen (vgl. [17], §2), so daß sich für jede Körpererweiterung K/k die K-wertigen Punkte von $\mathscr{F}_g$ mit der Menge

$$\mathscr{F}_g(K) = \{ \text{ Filtrationen } \mathcal{F}^\bullet \text{ auf } V_K \text{ mit } \dim_K gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(V_K) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

identifiziert. Ebenso lassen sich die im Paragraphen 1 eingeführten semistabilen Filtrationen parametrisieren. Genauer gesagt existiert eine in $\mathscr{F}_g$ offene Untervarietät $\mathscr{F}_g^{ss}$, so daß für jede Körpererweiterung K/k

$$\mathscr{F}_g^{ss}(K) = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathscr{F}_g(K); \mathcal{F}^\bullet \text{ ist semistabil } \}$$

([17], Prop. 2.1.). Man nennt $\mathscr{F}_g^{ss}$ auch den zum Paar (V, g) zugehörigen *Periodenbereich.* Um die Existenz dieser Periodenbereiche als Objekte in der Kategorie der Varietäten zu sichern, hat man, wie es bei uns der Fall ist, endliche Grundkörper k zu betrachten. Für solche Körper existieren nämlich nur endlich viele k-rationale Unterräume U in V, für die die Ungleichung $\text{slope}(U_K) \leq \text{slope}(V_K)$, bzgl. einer Filtration auf V_K, zu überprüfen ist.

Es sollen in dieser Arbeit außer $\mathscr{F}_g^{ss}$ auch noch andere Untervarietäten von $\mathscr{F}_g$ betrachten werden. Hierfür ist der Begriff einer Unterfunktion von g relevant.

Definition 2.1 Eine Unterfunktion h von g ist eine Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $h(x) \leq g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_g$ die Menge aller nichttrivialen Unterfunktionen von g, d.h. es gilt $\{0, g\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Für eine beliebige Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit endlichem Träger sei

$$\|h\| := \sum_x h(x)$$

als die *Länge* von h bezeichnet. Insbesondere hat die fixierte Funktion g die Länge d. Für eine Zahl $1 \leq i \leq d-1$ sei

$$\mathcal{B}^i := \{h \in \mathcal{B}; \|h\| = i\}$$

die Teilmenge der Unterfunktionen der Länge i von g. Häufig werden wir ein Element $h \in \mathcal{B}^i$ durch ein ungeordnetes i-Tupel

$$\underline{\mathrm{supp}}(h) = (y_1, \ldots, y_i)$$

reeller Zahlen darstellen, welches den Träger von h mit eventuellen Multiplizitäten wiederspiegelt. Den gewöhnlichen Träger einer Funktion h notieren wir hingegen mit $\mathrm{supp}(h)$. Gilt ferner $y_1 \geq \ldots \geq y_i$, so notieren wir $\underline{\mathrm{supp}}(h)$ auch in der Form

$$(y_1 \geq \ldots \geq y_i).$$

Als nächstes führen wir eine partielle Ordnung auf der Menge $\mathcal{B}$ ein. Wir werden im nächsten Paragraphen einen Zusammenhang dieser Ordnung zu der Bruhatordnung einer Coxetergruppe vom Typ A_{d-1} herstellen.

Definition 2.2 Seien h, h' zwei Unterfunktionen von g. Setze

$$h \geq h' :\Longleftrightarrow \|h\| = \|h'\|$$

und aus

$$\underline{\mathrm{supp}}(h) = (x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{\|h\|}),\ \underline{\mathrm{supp}}(h') = (x'_1 \geq x'_2 \geq \ldots \geq x'_{\|h'\|})$$

folgt $x_i \geq x'_i,\ \forall i = 1, \ldots, \|h\| = \|h'\|$.

Wir ordnen nun jeder Unterfunktion $h \in \mathcal{B}$ bzw. jeder Teilmenge $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ eine konstruierbare Untermenge von $\mathcal{F}_g$ zu. Hierzu identifizieren wir im weiteren sämtliche auftretenen Varietäten mit ihren abgeschlossenen Punkten. Für ein $h \in \mathcal{B}$ setzen wir

$$Y(h) := \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{F}_g; \exists\ k\text{-rationaler Unterraum } U \text{ von } V \text{ mit } \dim U = \|h\| \\ \text{und } \dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(U) = h(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Bezeichnet $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ eine beliebige Untermenge, so seien ferner

$$Y(\mathcal{B}') := \bigcup_{h \in \mathcal{B}'} Y(h) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_g(\mathcal{B}') := \mathcal{F}_g \setminus Y(\mathcal{B}').$$

Für die Mengen $Y(h)$, $h \in \mathcal{B}$, hat man in Analogie zu der Abschlußeigenschaft von Schubertzellen (vgl. [10] 13.8) folgendes Resultat.

Proposition 2.3 *Sei $h \in \mathcal{B}$. Dann gilt*

$$\overline{Y(h)} = \bigcup_{h' \geq h} Y(h').$$

Der Beweis dieser Proposition wird im Paragraphen 3 nachgereicht. Zunächst ziehen wir Konsequenzen.

Definition 2.4 Eine Teilmenge $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$ heißt abgeschlossen, falls neben $h \in \mathcal{B}'$ auch alle $h' \in \mathcal{B}$ mit

$$\sum_x x h'(x) \geq \sum_x x h(x)$$

in $\mathcal{B}'$ enthalten sind.

Offenbar gilt für eine abgeschlossene Menge $\mathcal{B}'$, daß neben $h \in \mathcal{B}'$ auch alle $h' \geq h$ in $\mathcal{B}'$ liegen. Daher folgt aus Proposition 2.3 das folgende Korollar.

Korollar 2.5 *Für eine abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ ist $Y(\mathcal{B}'^i)$ abgeschlossen in $\mathcal{F}_g$, $i = 1, \ldots, d-1$. Also ist auch $Y(\mathcal{B}') = \bigcup_{i=1}^{d-1} Y(\mathcal{B}'^i)$ abgeschlossen in $\mathcal{F}_g$ und $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')$ offen.*

Aus dem folgenden Lemma resultiert, daß der Periodenbereich tatsächlich eine der offenen Mengen $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')$ ist.

Lemma 2.6 *Sei*

$$\mathcal{B}^{ss} = \{h \in \mathcal{B}; \sum_x x h(x) > 0\}.$$

Dann ist $\mathcal{B}^{ss}$ abgeschlossen und $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}^{ss}) = \mathcal{F}_g^{ss}$.

Beweis: Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}^{ss}$ folgt unmittelbar aus der Definition. Der abgeschlossenene Unterraum $Y(\mathcal{B}^{ss})$ von $\mathcal{F}_g$ läßt sich wie folgt beschreiben:

$Y(\mathcal{B}^{ss}) = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{F}_g; \exists$ k-rationaler Unterraum U von V mit $deg_{\mathcal{F}^\bullet}(U) > 0\}$.

Folglich ist $Y(\mathcal{B}^{ss})$ gerade das abgeschlossene Komplement von $\mathcal{F}_g^{ss}$ in $\mathcal{F}_g$. Somit gilt also $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}^{ss}) = \mathcal{F}_g^{ss}$. $\square$

3 Der Beweis der Abschlußeigenschaft

In diesem Paragraphen beweisen wir die Proposition 2.3. Da man diesen Beweis auf die Abschlußeigenschaft von Bruhatzellen zurückführt, müssen wir zunächst einige Notationen aus der Theorie der linearen algebraischen Gruppen einführen.

Sei $T \subset GL(V) =: G$ der Diagonaltorus und $B \subset G$ die algebraische Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen bzgl. einer fixierten Basis $\{e_1, \ldots, e_d\}$ von V. Da die Basis offenbar k-rational ist, gilt dies auch für den Torus T und die Borelgruppe B. Sei

$$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}\}$$

die Standard-Wurzelbasis zu (T, B), d.h. es gilt

$$\alpha_i(\mathrm{diag}(t_1 \ldots, t_d)) = t_i t_{i+1}^{-1},\ 1 \leq i \leq d-1,$$

wobei $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_d)$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $t_1, \ldots, t_d$ sei. Wir bezeichnen mit $W \cong S_d$ die Weylgruppe von G bzgl. T und mit

$$S = \{s_1, \ldots, s_{d-1}\}$$

die Menge der einfachen Spiegelungen, wobei s_i die zur Wurzel α_i korrespondierende Spiegelung ist. Für eine Teilmenge $I \subset S$ sei

$$W_I =< s_i \,; s_i \in I >$$

die von I erzeugte parabolische Untergruppe in W. Entsprechend notieren wir mit

$$P_I = BW_IB$$

die zugehörige std.-parabolische Untergruppe von G. Als Extremfälle hat man also $P_\emptyset = B$ bzw. $P_S = G$. Ist speziell I von der Gestalt $I = S \setminus \{s_i\}$ für ein i, so schreiben wir auch $W_{\hat{i}}$ an Stelle von W_I bzw. $P_{\hat{i}}$ an Stelle von P_I.

Zu unserer fixierten Funktion g mit

$$\underline{\mathrm{supp}}(g) = (x_1 \geq \ldots \geq x_d)$$

assoziieren wir den reellen Cocharakter

$$\mu = \mu_g = (x_1, \ldots, x_d) \in X_*(T)_{\mathbb{R}} := X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Wir bezeichnen mit

$$W_\mu = \mathrm{Stab}_W(\mu)$$

den Stabilisator von μ bzgl. der Operation von W auf $X_*(T)_\mathbb{R}$. Analog sei

$$P_\mu = BW_\mu B$$

die zugehörige parabolische Untergruppe. Schreibt sich der herkömmliche Träger von g in der Form $\mathrm{supp}(g) = \{x'_1, \ldots, x'_r\}$, so besteht P_μ bzgl. unserer fixierten Basis also aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} M_1 & * & \cdot & \cdot & * \\ 0 & M_2 & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & M_r \end{pmatrix},$$

wobei die M_i invertierbare $g(x'_i) \times g(x'_i)$-Matrizen darstellen. Entsprechend ist die korrespondierende parabolische Untergruppe W_μ von W isomorph zu

$$S_{g(x'_1)} \times S_{g(x'_2)} \times \cdots \times S_{g(x'_r)}.$$

Wir wollen nun die in Paragraph 2 eingeführte Halbordnung auf $\mathcal{B}$ analysieren. Für ein Weylgruppenelement $w \in W$ und ein $0 \leq i \leq d$ definieren wir die folgende Unterfunktion der Länge i von g:

$$h^i_w(x) = \#\{k; x = (w\mu)_k, k = 1, \ldots, i\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Dabei verstehen wir unter $(w\mu)_k$ den k-ten Eintrag im Tupel $w\mu$. Folglich gilt dann

(1) $$\underline{\mathrm{supp}}(h^i_w) = (x_{w^{-1}(1)}, \ldots, x_{w^{-1}(i)}).$$

Als Extremfälle hat man

$$h^0_w = 0 \ \ \forall w \in W \text{ bzw. } h^d_w = g \ \ \forall w \in W.$$

Wir erhalten für jedes $1 \leq i \leq d-1$ eine Abbildung

$$\tilde{\kappa}_i : W \longrightarrow \mathcal{B}^i.$$

Lemma 3.1 *Die Abbildung $\tilde{\kappa}_i$ ist surjektiv und faktorisiert über $W_{\hat{i}}\backslash W/W_\mu$. Die induzierte Abbildung*

$$\kappa_i : W_{\hat{i}}\backslash W/W_\mu \longrightarrow \mathcal{B}^i$$

ist eine Bijektion, welche ordnungsumkehrend ist, wenn $W_{\hat{i}}\backslash W/W_\mu$ mit der Bruhatordnung versehen ist.

Beweis: Die erste Aussage des Lemmas ist trivial. Die Injektivität der Abbildung κ_i ist ebenso leicht einsehbar. Seien nun w, w' zwei Kostant-Repräsentanten bzgl. $W_{\hat{i}}\backslash W$. Es gilt (vgl. [6] 3.2.)

$$w \leq w' \Leftrightarrow w^{-1} \leq w'^{-1} \Leftrightarrow w^{-1}(j) \leq w'^{-1}(j) \;\; j = 1, \ldots, i.$$

Hieraus ergibt sich zusammen mit der Ungleichungskette $x_1 \geq \ldots \geq x_d$ die Behauptung. $\square$

Notation 3.2 Wir bezeichnen für ein $h \in \mathcal{B}^i, 1 \leq i \leq d-1$, mit

$$w_h \in W_{\hat{i}}\backslash W/W_\mu$$

das Urbild von h unter κ_i. Den Kostant-Repräsentanten der Doppelnebenklasse w_h notieren wir mit $\dot{w}_h$.

Für einen k-rationalen Unterraum U der Dimension i von V und ein Element $w \in W_{\hat{i}}\backslash W/W_\mu$ betrachten wir die zugehörige verallgemeinerte „Schubertzelle"

$$Y_U(w) = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{F}_g ; \dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(U) = h^i_w(x) \;\forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Wir wollen im nachfolgenden eine andere Beschreibung für $Y_U(w)$ herleiten. Es wird sich herausstellen, daß diese Menge einen homogenen Raum unter einer parabolischen Untergruppe von G darstellt. Betrachte hierzu die vollständige k-rationale Standardflagge

$$V^\bullet = (0) \subset V^1 \subset V^2 \subset \cdots \subset V^{d-1} \subset V$$

mit

$$V^i := < e_1, \ldots, e_i >, \; i = 1, \ldots, d-1.$$

Sei $\tilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definiert durch $\tilde{g}(x) := \sum_{y \geq x} g(y), x \in \mathbb{R}$. Wir definieren einen k-rationalen Punkt $\tilde{V}^\bullet \in \mathcal{F}_g$ durch

$$\tilde{V}^x := < e_1, \ldots, e_{\tilde{g}(x)} >, \; x \in \mathbb{R}R.$$

Die natürliche Operation von $P_{\hat{i}}$ auf $\mathcal{F}_g$ läßt $Y_{V^i}(w)$ invariant. Wir werden in der nachstehenden Proposition sehen, daß $Y_{V^i}(w)$ bereits einen $P_{\hat{i}}$-Orbit in der Flaggenvarietät $\mathcal{F}_g$ darstellt.

Proposition 3.3 *Sei* $w \in W_{\hat{i}} \backslash W / W_\mu$. *Dann operiert* $P_{\hat{i}}$ *transitiv auf* $Y_{V^i}(w)$. *Stellen wir unsere Flaggenvarietät* $\mathscr{F}_g$ *als homogenen Raum* G/P_μ *mit Basispunkt* $\tilde{V}^\bullet$ *dar, so gilt* $Y_{V^i}(w) = P_{\hat{i}} w P_\mu / P_\mu$.

Beweis: Zunächst notieren wir die zu g assoziierte 1-PS μ wieder in der Form

$$\mu = (x_1, \ldots, x_d).$$

Sei $w' \in W$ ein beliebiges Element. Dann gilt für jedes $1 \leq j \leq d-1$

$$h^j_{w'}(x) - h^{j-1}_{w'}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = x_{w'^{-1}(j)} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir definieren für jedes $w' \in W$ die Menge

$$\begin{aligned} Y(w') \quad &:= \quad \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathscr{F}_g; \dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(V^j/V^{j-1}) = h^j_{w'}(x) - h^{j-1}_{w'}(x) \\ & \qquad \forall x \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, d-1\} \\ &= \quad \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathscr{F}_g; gr^{x_{w'^{-1}(j)}}_{\mathcal{F}^\bullet}(V^j/V^{j-1}) \neq (0),\ j = 1, \ldots d-1\}. \end{aligned}$$

Wir benötigen die folgenden Lemmata.

Lemma 3.4 *Unter der Identifikation* $\mathscr{F}_g = G/P_\mu$ *gilt*

$$Y(w') = Bw'P_\mu/P_\mu.$$

Beweis: In der Tat, die Bruhatzelle $Bw'P_\mu/P_\mu$ läßt sich unter der obigen Identifikation wie folgt beschreiben ([12] 1.2):

$$Bw'P_\mu/P_\mu = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathscr{F}_g; gr^{x_j}_{\mathcal{F}^\bullet}(V^{w'(j)}/V^{w'(j)-1}) \neq 0 \ \ j = 1, \ldots, d\}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun durch eine Variablentransformation. $\square$

Lemma 3.5 *Die* $Y(w')$ *induzieren eine Zerlegung*

$$Y_{V^i}(w) = \bigcup_{w' \in W_{\hat{i}} w} Y(w').$$

Beweis: Sei $\mathcal{F}^\bullet \in Y(w')$ für ein $w' \in W_{\hat{i}}w$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(V^i) &= \sum_{j=1}^{i} \dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(V^j/V^{j-1}) = \sum_{j=1}^{i} \left(h^j_{w'}(x) - h^{j-1}_{w'}(x)\right) \\ &= h^i_{w'}(x) = h^i_w(x).\end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt $\mathcal{F}^\bullet$ ein Element aus $Y_{V^i}(w)$. Da sämtliche Subquotienten $V^j/V^{j-1}, j = 1, \ldots, d-1$ eindimensional sind, existiert zu jedem $1 \leq j \leq d-1$ genau eine Sprungstelle $y_j \in \mathrm{supp}(g)$ mit $gr^{y_j}_{\mathcal{F}^\bullet}(V^j/V^{j-1}) \neq (0)$. Nun gilt aber $\dim gr^x_{\mathcal{F}^\bullet}(V^i) = h^i_w(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Folglich sind die ersten i Sprungstellen $y_1, \ldots, y_i$ lediglich eine Permutation der $x_{w^{-1}(1)}, \ldots, x_{w^{-1}(i)}$. Also existiert ein $w' \in W_{\hat{i}}w$ mit $\mathcal{F}^\bullet \in Y(w')$. $\square$

Ende des Beweises von Proposition 3.3: Die Identität $P_{\hat{i}} = BW_{\hat{i}}B = \bigcup_{w \in W_{\hat{i}}} BwB$ induziert die Zerlegung ([1] Kap. IV, §2 Prop. 2)

$$P_{\hat{i}}wP_\mu/P_\mu = \bigcup_{w' \in W_{\hat{i}}w} Bw'P_\mu/P_\mu.$$

Die Behauptung der Proposition 3.3 ergibt sich nun unmittelbar aus den vorhergehenden Lemmata. $\square$

Bemerkung 3.6 Die Bezeichnung verallgemeinerte „Schubertzelle“ ist eigentlich irreführend, da die Varietäten $P_{\hat{i}}wP_\mu/P_\mu$, im Gegensatz zu den herkömmlichen Bruhatzellen, im allgemeinen keine standard-affinen Räume sind.

Man hat also eine Zerlegung

$$\mathscr{F}_g = \dot{\bigcup_{w \in W_{\hat{i}} \backslash W/W_\mu}} Y_{V^i}(w) = \dot{\bigcup_{w \in W_{\hat{i}} \backslash W/W_\mu}} P_{\hat{i}}\, wP_\mu/P_\mu$$

in verallgemeinerte „Schubertzellen“, die der Zerlegung in $P_{\hat{i}}$-Orbiten von G/P_μ, entspricht. Genauso induziert jeder k-rationale Unterraum U der Dimension i von V eine disjunkte Vereinigung

$$\mathscr{F}_g = \dot{\bigcup_{w \in W_{\hat{i}} \backslash W/W_\mu}} Y_U(w). \tag{2}$$

Genauso wie im Fall von herkömmlichen Bruhatzellen haben wir auch bei unseren verallgemeinerten „Schubertzellen“ eine entsprechende Abschlußeigenschaft.

Lemma 3.7 *Für ein beliebiges* $w \in W_{\hat{i}} \backslash W / W_\mu, 1 \leq i \leq d-1$ *gilt*

$$\overline{P_{\hat{i}} w P_\mu / P_\mu} = \bigcup_{\substack{w' \in W_{\hat{i}} \backslash W / W_\mu \\ w' \leq w}} P_{\hat{i}} w' P_\mu / P_\mu$$

bzw.

$$\overline{Y_{V^i}(w)} = \bigcup_{\substack{w \in W_{\hat{i}} \backslash W / W_\mu \\ w' \leq w}} Y_{V^i}(w').$$

Beweis: Der Beweis folgt aus der Abschlußeigenschaft für herkömmliche Bruhatzellen und aus der Gleichheit

$$P_{\hat{i}} w P_\mu = B W_{\hat{i}} \dot{w} P_\mu = \bigcup_{w' \in W_{\hat{i}} \dot{w}} B w' P_\mu$$

(vgl. [1] Ch. IV, §2 Prop. 2). □

Wir wollen nun die Proposition 2.3 beweisen. Zuvor sei aber noch für $1 \leq i \leq d-1$ die Identität

$$(3) \qquad Y(h^i_w) = \bigcup_{g \in G(k)} g Y_{V^i}(w)$$

erwähnt. Sie folgt aus der Tatsache, daß die endliche Gruppe $G(k)$ transitiv auf den k-rationalen Unterräumen einer gegebenen Dimension operiert.

Beweis von Proposition 2.3: Sei $h \in \mathcal{B}^i$. Dann gilt wegen (3) die Gleichheit

$$Y(h) = \bigcup_{g \in G(k)} g Y_{V^i}(w_h).$$

Aus der Abschlußeigenschaft der verallgemeinerten „Schubertzellen“ folgt schließlich

$$\begin{aligned} \overline{Y(h)} &= \bigcup_{g \in G(k)} \overline{g Y_{V^i}(w_h)} = \bigcup_{g \in G(k)} \bigcup_{\substack{w \in W_{\hat{i}} \backslash W / W_\mu \\ w \leq w_h}} g Y_{V^i}(w) \\ &= \bigcup_{\substack{w \in W_{\hat{i}} \backslash W / W_\mu \\ w \leq w_h}} Y(h^i_{w'}) = \bigcup_{h' \geq h} Y(h') \quad \Box. \end{aligned}$$

4 Die Formulierung der Hauptresultate

Sei ℓ eine für den Rest der Arbeit fixierte Primzahl mit $(\ell, q) = 1$. Bezeichnet X eine Varietät über dem endlichen Körper k und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir zur Abkürzung seine ℓ-adische Kohomologie mit

$$H^n_{ét}(X) := H^n_{ét}(X \times_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Dies ist ein $Gal(\overline{k}/k)$-Modul, das heißt, er ist mit einer Operation des Frobenius versehen. Die ℓ-adische Kohomologie mit kompakten Träger von $X \times_k \overline{k}$ notieren wir mit

$$H^n_c(X) := H^n_c(X \times_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Ist schließlich V ein beliebiger $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorraum und r eine ganze Zahl, so notieren wir den r-fachen Tate-Twist von V mit $V(r) = V \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(r)$.

Sei nun $I \subset S$ eine echte maximale Untermenge, d.h. es ist $I = S \setminus \{s_i\}$ für ein $1 \leq i \leq d-1$. Wir definieren

$$\Omega_I := \bigcup_{\substack{w \in W \\ h^i_w \in \mathcal{B}'^i}} W_{\hat{i}} w W_\mu \cap W^\mu. \tag{4}$$

Einer beliebigen Teilmenge $I \subsetneq S$ ordnen wir dann die Menge

$$\Omega_I := \bigcap_{\substack{I \subset J \\ \#(S \setminus J) = 1}} \Omega_J. \tag{5}$$

zu. Schließlich setzen wir $\Omega_S = W^\mu$. Offenbar ist die Zuordnung $I \mapsto \Omega_I$ inklusionserhaltend, genauer gilt sogar die Gleichheit

$$\Omega_{I \cap J} = \Omega_I \cap \Omega_J \quad \forall I, J \subset S. \tag{6}$$

Im weiteren bezeichnen wir für ein Weylgruppenelement $w \in W^\mu$ mit I_w die kleinste Teilmenge von S, so daß w in Ω_{I_w} enthalten ist. Offenbar gilt dann die Äquivalenz

$$I_w \subset I \Leftrightarrow w \in \Omega_I. \tag{7}$$

Für eine parabolische Untergruppe $P \subset G$ betrachten wir die triviale Darstellung von $P(k)$ auf $\mathbb{Q}_\ell$. Die resultierende induzierte Darstellung $i^{G(k)}_{P(k)}(\mathbb{Q}_\ell)$ notieren wir zur Abkürzung mit i^G_P. Ferner setzen wir

$$v^G_P = i^G_P / \sum_{P \subsetneq Q} i^G_Q.$$

Im Fall $P = B$ erhalten wir somit die Steinberg-Darstellung [21]. Ist schließlich $w \in W$ ein Weylgruppenelement, so bezeichnen wir mit $l(w)$ seine Länge.

Mit diesen Notationen können wir nun die Hauptresultate dieser Arbeit formulieren.

Satz 4.1 *Sei $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}^{ss}$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann gilt*

$$H^*_{\acute{e}t}(Y(\mathcal{B}')) = \bigoplus_{\substack{w \in W^\mu \\ \#(S\setminus I_w)=1}} i^G_{P_{I_w}}(-l(w))[-2l(w)] \oplus$$

$$\bigoplus_{\substack{w \in W^\mu \\ \#(S\setminus I_w)>1}} \Big(i^G_G(-l(w))[-2l(w)] \oplus v^G_{P_{I_w}}(-l(w))[-2l(w) - \#(S \setminus I_w) + 1] \Big).$$

Die Notation $[-n], n \in \mathbb{N}$, bedeutet dabei, daß der voranstehende Vektorraum in den Grad n des betreffenden graduierten Kohomologieringes geshiftet wird.

Für das offene Komplement $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')$ von $Y(\mathcal{B}')$ hat man das folgende Resultat.

Satz 4.2 *Sei $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}^{ss}$ abgeschlossen. Dann gilt*

$$H^*_c(\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')) = \bigoplus_{w \in W^\mu} v^G_{P_{I_w}}(-l(w))[-2l(w) - \#(S \setminus I_w)].$$

Ist speziell $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^{ss}$, so läßt sich die Menge I_w wie folgt beschreiben. Bezeichne mit

$$\langle\ ,\ \rangle : X_*(T)_\mathbb{R} \times X^*(T)_\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die natürliche Paarung zwischen den reellen Cocharakteren und Charakteren. Sei $\alpha_i^\vee \in X_*(T)_\mathbb{R}$ die Cowurzel zu α_i. Sei schließlich ω_i das zur Wurzel α_i korrespondierende Fundamentalgewicht, d.h. es gilt $\langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$.

Lemma 4.3 *Für jedes $w \in W^\mu$ gilt*

$$I_w = \{s_i \in S; \langle w\mu, \omega_i \rangle \leq 0\}.$$

Beweis: Aus (4) und (7) folgt die Identität

$$\begin{aligned} I_w &= \bigcap_{\substack{w \in \Omega_I \\ \#(S\setminus I)=1}} I = S \setminus \{s \in S; w \in \Omega_{S\setminus\{s\}}\} = S \setminus \{s_i \in S; h^i_w \in (\mathcal{B}^{ss})^i\} \\ &= \{s_i \in S; h^i_w \notin (\mathcal{B}^{ss})^i\}. \end{aligned}$$

Per Definition von $\mathcal{B}^{ss}$ gilt aber $h \in \mathcal{B}^{ss} \Leftrightarrow \sum_x xh(x) > 0$. Aus (1) erhält man die Gleichung $\sum_x xh_w^i(x) = \langle w\mu, \omega_i \rangle$ und somit die Behauptung. $\square$

Definieren wir für jedes $w \in W^\mu$ die Menge Δ_w durch

$$\Delta_w := \{\alpha_i \in \Delta; s_i \notin I_w\},$$

so ist P_{I_w} gerade diejenige std.-parabolische Untergruppe, deren unipotentes Radikal von Δ_w erzeugt wird. Als Spezialfall des Satzes 4.2 erhält man somit folgende Formel, welche von Kottwitz und Rapoport vermutet wurde, vgl. [19].

Satz 4.4 *Es gilt*

$$H_c^*(\mathcal{F}_g^{ss}) = \bigoplus_{w \in W^\mu} v_{P_{I_w}}^G(-l(w))[-2l(w) - \#\Delta_w].$$

Als nächstes leiten wir folgenden Verschwindungssatz her (vgl. [19]).

Korollar 4.5 *Für den zu g assoziierten Periodenbereich $\mathcal{F}_g^{ss}$ ist*

$$H_c^i(\mathcal{F}_g^{ss}) = 0 \quad 0 \leq i \leq d-2$$

und

$$H_c^{d-1}(\mathcal{F}_g^{ss}) = v_B^G.$$

Für den Beweis benötigen wir nachstehende Lemmata.

Lemma 4.6 *Sei $w \in W^\mu$ und $s = s_\alpha \in S$ die zu einer Wurzel $\alpha \in \Delta$ zugehörige Spiegelung. Wir setzen voraus, daß sw in W^μ enthalten und die Identität $l(sw) = l(w) + 1$ erfüllt ist. Dann gilt*

$$\Delta_{sw} \setminus \{\alpha\} = \Delta_w \setminus \{\alpha\}$$

und

$$\Delta_{sw} \subset \Delta_w.$$

Insbesondere unterscheiden sich Δ_{sw} und Δ_w um höchstens ein Element.

Beweis: Per Definition von Δ_w gilt

$$\Delta_w = \{\alpha \in \Delta; \langle w\mu, \omega_\alpha\rangle \ > 0\}.$$

Ist nun $\beta \in \Delta$ beliebig, so gilt $\langle sw\mu, \omega_\beta\rangle \ = \ \langle w\mu, s\omega_\beta\rangle$ und

$$s\omega_\beta = \begin{cases} \omega_\beta & ; \quad \beta \neq \alpha \\ \omega_\alpha - \alpha & ; \quad \beta = \alpha \end{cases} \quad ([1]\ 1.10).$$

Hieraus folgt offenbar die erste Behauptung. Die Voraussetzung $l(sw) = l(w) + 1$ ist äquivalent zur Positivität der Wurzel $w^{-1}(\alpha)$, d.h. $w^{-1}(\alpha) > 0$ ([9] 1.6). Da μ im Abschluß der positiven Weylschen Kammer liegt (vgl. §3) folgt $\langle w\mu, \alpha\rangle \ = \ \langle \mu, w^{-1}\alpha\rangle \ \geq 0$. Ist α ein Element von Δ_{sw}, so gilt also

$$0 < \langle sw\mu, \omega_\alpha\rangle \ = \ \langle w\mu, \omega_\alpha - \alpha\rangle \ = \ \langle w\mu, \omega_\alpha\rangle - \langle w\mu, \alpha\rangle.$$

Es folgt $\langle w\mu, \omega_\alpha\rangle \ > \ \langle w\mu, \alpha\rangle \ \geq 0$, also $\alpha \in \Delta_w$. □

Lemma 4.7 *Sei $w \in W^\mu$. Dann gilt*

$$\#(\Delta \setminus \Delta_w) \leq l(w).$$

Beweis: Sei $w = s_1 \cdots s_r,\ r = l(w)$ eine reduzierte Darstellung mit $s_i \in S$. Wegen der Gleichheit

$$W^\mu = \{w \in W; l(ws) = l(w) + 1\ \forall s \in W_\mu \cap S\}$$

([9] 1.10) sind neben w auch sämtliche Ausdrücke der Form

$$s_r,\ s_{r-1}s_r, \ldots, s_2 \cdots s_r$$

in W^μ enthalten. Die Behauptung ergibt sich nun durch vollständige Induktion aus Lemma 4.6. □

Beweis von Korollar 4.5: Die Anwendung von Lemma 4.7 liefert für jedes $w \in W^\mu$ die Ungleichung

$$\#\Delta_w + 2l(w) \geq (\#\Delta - l(w)) + 2l(w) = \#\Delta + l(w) \geq \#\Delta.$$

Gleichheit gilt dabei in dieser Kette genau dann wenn $w = 1$. Durch Anwendung von Satz 4.4 erhält man unter Berücksichtigung von $\#\Delta = d{-}1$ die Behauptung. □

Wir wollen nochmals die Gegenläufigkeit der Ausdrücke $l(w)$ und Δ_w bezüglich der Bruhatordnung auf W^μ betonen. Aus $w' \leq w$ folgt $l(w') \leq l(w)$, aber $\Delta_w \subset \Delta_{w'}$. Die letztere Inklusion sieht man folgendermaßen ein. Gilt $w' \leq w$, so hat man nach [6] 3.2. die Relation $w'^{-1}\omega_i \geq w^{-1}\omega_i \ \forall i$. Die obige Inklusion folgt nun aus der Tatsache, daß μ im Abschluß der positiven Weylschen Kammer liegt. Daher kann es passieren, daß für $w' \leq w$ der induzierte Grad von w' größer als derjenige von w ist, wie folgendes Beispiel zeigt. Dies widerlegt eine Behauptung von Rapoport in [19].

Beispiel 4.8 Sei $\dim_k V = 5$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion mit geordneten Träger

$$\underline{\mathrm{supp}}(g) = (x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5),$$

wobei $\sum_{i=1}^5 x_i = 0$ und $x_4 > 0$. Betrachte die Weylgruppenelemente

$$w' = (2,3,4) \text{ bzw. } w = (2,3,4,5).$$

Offenbar ist $w' < w$, und es gilt $l(w') = 2$ bzw. $l(w) = 3$. Weiter ist

$$\Delta_{w'} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \text{ bzw. } \Delta_w = \{\alpha_1\}.$$

Somit gilt also

$$2l(w') + \#\Delta_{w'} = 8 \ \text{ aber } \ 2l(w) + \#\Delta_w = 7.$$

Wir wollen nun die Reinheit der Kohomologie von Periodenbereichen diskutieren. Wie man der Formel aus Satz 4.4 entnimmt, ist die Kohomologie der Periodenbereiche im allgemeinen nicht rein.

Beispiel 4.9 Sei $\dim_k V = 3$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion mit $\underline{\mathrm{supp}}(g) = \{x_1 > x_2 > x_3\}$, wobei $x_2 > 0$ und $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. In diesem Fall gilt für die Kohomologie von $\mathcal{F}_g^{ss}$

$$H_c^0(\mathcal{F}_g^{ss}) = 0 \qquad H_c^4(\mathcal{F}_g^{ss}) = v_B^G(-1) \oplus i_G^G(-2)$$

$$H_c^1(\mathcal{F}_g^{ss}) = 0 \qquad H_c^5(\mathcal{F}_g^{ss}) = v_{P_{\{s_1\}}}^G(-2)$$

$$H_c^2(\mathcal{F}_g^{ss}) = v_B^G \qquad H_c^6(\mathcal{F}_g^{ss}) = i_G^G(-3)$$

$$H_c^3(\mathcal{F}_g^{ss}) = v_{P_{\{s_1\}}}^G(-1) \qquad H_c^i(\mathcal{F}_g^{ss}) = 0 \ \ \forall i > 6$$

Dagegen ist die Kohomologie des Drinfeldraumes $\Omega(V)$ im folgenden Sinn rein. Dabei ist $\Omega(V) \subset \mathbb{P}(V)$ gleich $\mathcal{F}_g^{ss}$ für g mit $\underline{\text{supp}}(g) = (x_1, x_2^{dimV-1}),\ x_1 > x_2$. Explizit ist $\Omega(V)$ das Komplement aller k-rationalen Hyperebenen im $\mathbb{P}(V)$, d.h. es gilt

$$\Omega(V) = \mathbb{P}(V) \setminus \bigcup_{\substack{H \subset V \ \ k\text{-rat.} \\ \dim H = \dim V - 1}} \mathbb{P}(H).$$

In diesem Fall ist die Menge W^μ durch die Elemente

$$w_0 = 1, w_1 = s_1, w_2 = s_2 s_1, \ldots, w_{d-1} = s_{d-1} s_{d-2} \cdots s_1$$

gegeben. Wegen der Gleichheit

$$\Delta_{w_i} = \{\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{d-1}\}.$$

ergibt sich für die Kohomologie des Drinfeldraumes folgende explizite Formel:

$$H_c^*(\Omega(V), \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} v^G_{P_{(d-i,1,\ldots,1)}}(i+1-d)[-2(d-1)+i].$$

Also ist $H_c^{2(\dim V-1)-i}(\Omega(V))$ ein reiner Galois-Modul vom Gewicht $2(\dim V - 1) - 2i,\ i = 0, \ldots, 2(\dim V - 1)$. Diese Reinheit ist hier eine Folgerung unseres Hauptresultates. Sie ist allerdings a priori klar, da dies allgemein für das Komplement eines Hyperebenenarrangements gilt ([15] S. 194). Diese Tatsache ermöglicht die Berechnung der einzelnen Kohomologiegruppen des Drinfeldraumes aus der Formel für die Euler-Poncaré-Chrakteristik, da sich die Glieder verschiedenen Grades nicht gegenseitig wegkürzen können.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir die Beweisstrategie der Sätze 4.1 bzw. 4.2 schildern. Im Fall von Satz 4.1 betrachten wir im Paragraphen 5 eine Überdeckung von $Y(\mathcal{B}')$ durch abgeschlossene Untervarietäten der Gestalt gY_I, wobei I die maximalen echten Teilmengen von S und g die Linksnebenklassen in $G(k)/P_I(k)$ durchläuft. Ähnlich wie bei der Herleitung der Mayer-Vietoris-Sequenz bzgl. einer abgeschlossenen Überdeckung konstruieren wir für eine étale Garbe F auf $Y(\mathcal{B}')$ eine Sequenz von étalen Garben auf diesem Raum. Anstatt sämtliche sukzessiven Durchschnitte der Untervaritäten gY_I zu betrachten, wie im Fall der Mayer-Vietoris-Sequenz, nehmen wir hier nur Durchschnitte der Form

$$g(Y_{I_1} \cap \ldots \cap Y_{I_r}), \ \ g \in G(k)/P_{I_1 \cap \ldots \cap I_r}(k),$$

wobei $I_1, \dots I_r$ maximale echte Teilmengen in S sind. Auf diese Weise erhalten wir einen Komplex

$$0 \to F \to \bigoplus_{\substack{I \subset S \\ \#(S \setminus I)=1}} \bigoplus_{g \in (G/P_I)(k)} (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F \to \bigoplus_{\substack{I \subset S \\ \#(S \setminus I)=2}} \bigoplus_{g \in (G/P_I)(k)} (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F \to$$

$$\dots \to \bigoplus_{\substack{I \subset S \\ \#(S \setminus I)=d-2}} \bigoplus_{g \in (G/P_I)(k)} (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F \to \bigoplus_{g \in (G/B)(k)} (\phi_{g,\emptyset})_*(\phi_{g,\emptyset})^* F \to 0$$

von étalen Garben auf $Y(\mathcal{B}')$, wobei die $\phi_{g,I}$ die abgeschlossenen Immersionen $gY_I \hookrightarrow Y$ bezeichnen. Die charakterisierende Indexmenge dieses Komplexes entspricht dabei dem Tits-Komplex zur Gruppe $G(k)$. Im Paragraphen 6 zeigen wir die Azyklizität dieses Komplexes, indem wir die Azyklizität des durch Lokalisierung in einem geometrischen Punkt x von Y entstehenden Komplexes beweisen. Dieser entspricht einem Kettenkomplex mit Werten in F_x, der von einem Unterkomplex des Tits-Komplexes induziert wird. Mit Hilfe eines Kontraktionskriteriums für simpliziale Komplexe, die durch partiell geordnete Mengen induziert werden, zeigen wir die Zusammenziehbarkeit der geometrischen Realisierung dieses Unterkomplexes. Hieraus folgt insbesondere die Azyklizität des betrachteten Kettenkomplexes. Im Paragraphen 7 werten wir schließlich die Spektralsequenz aus, die sich aus dem Ausgangskomplex ergibt. Dies liefert die gesuchten Kohomologiegruppen von Y. Den Satz 4.2 beweisen wir durch die Anwendung der langen exakten Kohomologiesequenz zu dem Tripel $\mathcal{F}_g(\mathcal{B}') \hookrightarrow \mathcal{F}_g \hookleftarrow Y(\mathcal{B}')$.

5 Der fundamentale Komplex

Ist $I \subset S$ von der Form $I = S \setminus \{s_i\}$, so setzen wir

$$(8) \qquad Y_I := \dot{\bigcup_{h \in \mathcal{B}'^i}} Y_{V^i}(w_h).$$

Da die Menge $\mathcal{B}'$ abgeschlossen ist, erhält man wiederum aus der Proposition 3.3 und der Abschlußeigenschaft der verallgemeinerten Schubertzellen die nachstehende Folgerung.

Korollar 5.1 *Die Menge Y_I ist abgeschlossen in $\mathcal{F}_g$.*

Für eine beliebige Teilmenge $I \underset{\neq}{\subset} S$ definieren wir

$$(9) \qquad Y_I := \bigcap_{\substack{I \subset J \\ \#(S \setminus J)=1}} Y_J.$$

Aus technischen Gründen setzen wir $Y_S = Y(\mathcal{B}')$. Diese Zuordnung liefert also abgeschlossene Teilräume in $Y(\mathcal{B}')$, welche wir mit der reduzierten Schemastruktur versehen. Ferner haben wir eine Operation der parabolischen Untergruppe P_I auf Y_I, welche durch die natürliche Aktion von G auf $\mathcal{F}_g$ via Restriktion induziert wird. Analog zu dem Fall der Ω_I ist die obige Zuordnung ebenfalls inklusionserhaltend, d.h. aus $I \subset J$ folgt $Y_I \subset Y_J$. Für zwei Teilmengen $I, J \subset S$ gilt sogar die Gleichheit

$$(10) \qquad Y_{I \cap J} = Y_I \cap Y_J.$$

Für ein beliebiges $I \subset S$ hat man zwischen Ω_I und Y_I unter der Identifikation $\mathcal{F}_g = G/P_\mu$ die nachstehende Beziehung.

Lemma 5.2 *Es gilt* $Y_I = \dot{\bigcup}_{w \in \Omega_I} BwP_\mu/P_\mu$.

Beweis: Sei zunächst I von der Gestalt $I = S \setminus \{s_i\}$. Dann gilt

$$Y_I = \dot{\bigcup_{h \in \mathcal{B}'^i}} Y_{V^i}(w_h) = \dot{\bigcup_{h \in \mathcal{B}'^i}} P_{\hat{i}} w_h P_\mu/P_\mu = \dot{\bigcup_{h \in \mathcal{B}'^i}} \bigcup_{w \in W_{\hat{i}} \dot{w}_h} BwP_\mu/P_\mu$$

$$= \dot{\bigcup_{h \in \mathcal{B}'^i}} \dot{\bigcup_{w \in W_{\hat{i}} \dot{w}_h \cap W^\mu}} BwP_\mu/P_\mu = \dot{\bigcup_{w \in \Omega_I}} BwP_\mu/P_\mu.$$

Der allgemeine Fall ergibt sich dann aus der Verträglichkeitseigenschaft (6), (10) beider Zuordnungen bzgl. des Durchschnittes von Teilmengen in S. $\square$

Seien nun $I \subset S$ und $g \in G(k)$ beliebig. Wir erhalten eine abgeschlossene Immersion

$$\phi_{g,I} : gY_I \hookrightarrow Y(\mathcal{B}')$$

von Varietäten, wobei gY_I das Bild von Y_I unter dem Translationsmorhpismus

$$\begin{aligned} g : Y(\mathcal{B}') &\longrightarrow Y(\mathcal{B}') \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

sei. Da die parabolische Untergruppe P_I die Varietät Y_I fixiert, sind die Notationen gY_I und $\Phi_{g,I}$ auch für $g \in (G/P_I)(k)$ sinnvoll.

Sei nun F eine étale Garbe auf $Y(\mathcal{B}')$ und seien $I \subset J$ zwei Teilmengen von S mit $\#(J \setminus I) = 1$. Seien ferner $g \in (G/P_I)(k), h \in (G/P_J)(k)$ zwei Linksnebenklassen, so daß g unter der kanonischen Projektion $(G/P_I)(k) \longrightarrow (G/P_J)(k)$ auf h abgebildet wird. Dann sei

$$p_{I,J}^{g,h} : (\phi_{h,J})_*(\phi_{h,J})^* F \longrightarrow (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F$$

derjenige Morphismus von étalen Garben auf $Y(\mathcal{B}')$, der von der abgeschlossenen Immersion

$$gY_I \hookrightarrow hY_J$$

herrührt. Wird g nicht auf h abgebildet, so setzen wir $p_{I,J}^{g,h} = 0$. Schließlich definieren wir

$$p_{I,J} = \bigoplus_{(g,h)\in(G/P_I)(k)\times(G/P_J)(k)} p_{I,J}^{g,h} : \bigoplus_{h\in(G/P_J)(k)} (\phi_{h,J})_*(\phi_{h,J})^* F \longrightarrow \bigoplus_{g\in(G/P_I)(k)} (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F.$$

Für beliebige Teilmengen $I, J \subset S$ mit $\#J - \#I = 1$ setzen wir

$$d_{I,J} = \begin{cases} (-1)^i p_{I,J} & : \quad J = I \cup \{s_i\} \\ 0 & : \quad I \not\subset J \end{cases} .$$

Wir erhalten einen Komplex

$$(*) : 0 \to F \to \bigoplus_{\substack{I\subset S \\ \#(S\setminus I)=1}} \bigoplus_{g\in(G/P_I)(k)} (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F \to \bigoplus_{\substack{I\subset S \\ \#(S\setminus I)=2}} \bigoplus_{g\in(G/P_I)(k)} (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F \to$$

$$\ldots \to \bigoplus_{\substack{I\subset S \\ \#(S\setminus I)=d-2}} \bigoplus_{g\in(G/P_I)(k)} (\phi_{g,I})_*(\phi_{g,I})^* F \to \bigoplus_{g\in(G/B)(k)} (\phi_{g,\emptyset})_*(\phi_{g,\emptyset})^* F \to 0$$

von étalen Garben auf $Y(\mathcal{B}')$, in dem die Differentiale durch die $d_{I,J}$ induziert werden.

Im nächsten Paragraphen werden wir den folgenden Satz zeigen.

Satz 5.3 *Sei $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}^{ss}$. Dann ist der Komplex $(*)$ azyklisch.*

6 Der Beweis von Satz 5.3

Die Azyklizität von $(*)$ wird mittels eines Kontrahierbarkeitskriteriums für simpliziale Komplexe, welche von partiell geordneten Mengen definiert werden, gezeigt.

Sei $X = (X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wir assoziieren zu X einen simplizialen Komplex

$$X^\bullet = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n,$$

wobei ein $n-$Simplex $\tau \in X^n$ durch ein geordnetes $n-$Tupel

$$\tau = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$$

mit Elementen $x_i \in X,\ i = 0, \ldots, n$ gegeben ist. Insbesondere gilt dann für die 0-Simplizes X^0 von $X^\bullet$ die Identität $X^0 = X$.

Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ von partiell geordneten Mengen ist eine Abbildung, welche ordnungserhaltend ist. Ein solcher Morphismus induziert eine simpliziale Abbildung

$$f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$$

von simplizialen Komplexen. Durch diese Zuordnungen erhält man also einen Funktor von der Kategorie der partiell geordneten Mengen in die Kategorie der simplizialen Komplexe.

Beispiel 6.1 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem beliebigen Körper k. Bezeichne mit $T_k(V)$ die Menge seiner nicht-trivialen Unterräume. Man hat eine kanonische Ordnungsstruktur auf $T_k(V)$, welche durch die Inklusion von Unterräumen gegeben ist. Ein $n-$Simplex $\tau \in T_k(V)^n$ wird also durch eine Flagge

$$\tau = (\,(0) \underset{\neq}{\subset} U_0 \underset{\neq}{\subset} U_1 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} U_n \underset{\neq}{\subset} V\,)$$

von Unterräumen repräsentiert. Dieser simpliziale Komplex ist bekanntlich kanonisch isomorph zum Tits-Komplex der Gruppe $GL(V)$ (vgl. [16] §3).

Für simpliziale Komplexe, die durch partiell geordnete Mengen induziert werden, hat man folgendes Kontrahierbarkeitskriterium von Quillen (vgl. [16], 1.5.).

Proposition 6.2 *Sei X eine partiell geordnete Menge und $x_0 \in X$ ein fixiertes Element. Falls ein Endomorphismus $f : X \longrightarrow X$ existiert mit*

$$x \leq f(x) \geq x_0 \ \ \forall x \in X,$$

so ist der zu X assoziierte simpliziale Komplex $X^\bullet$ kontrahierbar.

Wir wollen nun den Satz 5.3 beweisen.

Beweis von Satz 5.3 : Um die Behauptung zu beweisen, überprüfen wir die Exaktheit von $(*)$ nach Übergang zur Lokalisierung in einem geometrischen Punkt $x \in Y(\mathcal{B}')(k^{sep}) = Y(\mathcal{B}')(\overline{k})$. Die Lokalisierung von $(*)$ in x ergibt:

$$(**) : 0 \longrightarrow F_x \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I \subset S \\ \#(S \setminus I)=1}} \bigoplus_{\substack{g \in (G/P_I)(k) \\ x \in gY_I(\overline{k})}} F_x \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I \subset S \\ \#(S \setminus I)=2}} \bigoplus_{\substack{g \in (G/P_I)(k) \\ x \in gY_I(\overline{k})}} F_x \longrightarrow$$

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I \subset S \\ \#(S \setminus I)=d-2}} \bigoplus_{\substack{g \in (G/P_I)(k) \\ x \in gY_I(\overline{k})}} F_x \longrightarrow \bigoplus_{\substack{g \in (G/P_\emptyset)(k) \\ x \in gY_\emptyset(\overline{k})}} F_x \longrightarrow 0.$$

Wir definieren für jedes $I \underset{\neq}{\subset} S$ die Menge

$$R_I^x := \{gP_I(k) \in (G/P_I)(k); x \in gY_I(\overline{k})\} \subset (G/P_I)(k).$$

Sind $I \subset J \underset{\neq}{\subset} S$ zwei Teilmengen, so ist Y_I eine abgeschlossene Untervarietät von Y_J (vgl. (10)). Folglich gilt die Implikation

$$gP_I(k) \in R_I^x \Rightarrow gP_J(k) \in R_J^x,$$

d.h. mit jedem Simplex $\tau \in R_I^x$ vom Typ I ist auch jedes Untersimplex vom Typ J in R_J^x enthalten. Dadurch erhalten wir einen simplizialen Unterkomplex des Tits-Komplexes zur endlichen Gruppe $G(k)$, welchen wir mit $R^\bullet$ bezeichnen. Dabei repräsentieren die Elemente aus

$$\begin{aligned}
R^0 &= \bigcup_{\{I; \#(S \setminus I)=1\}} R_I^x \quad \text{die 0-Simplizes,} \\
R^1 &= \bigcup_{\{I; \#(S \setminus I)=2\}} R_I^x \quad \text{die 1-Simplizes,} \\
&\ \vdots \\
R^{d-2} &= \bigcup_{\{I; \#(S \setminus I)=d-1\}} R_I^x = R_\emptyset^x \quad \text{die } (d-2)\text{-Simplizes.}
\end{aligned}$$

Im nachfolgenden Lemma wird gezeigt, daß der simpliziale Komplex $R^\bullet$ kontrahierbar ist. Daraus folgt die Azyklizität des zugehörigen Kettenkomplexes $(**)$ mit Werten in F_x. Weil x beliebig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 6.3 *Der simpliziale Komplex $R^\bullet$ ist kontrahierbar.*

Beweis: Wir identifizieren den Tits-Komplex zu $G(k)$ mit dem simplizialen Komplex $T_k(V)^\bullet$ (vgl. Beispiel 6.1). Mittels dieser Identifikation lassen sich die Simplizes von $R^\bullet$ wie folgt beschreiben:

$$
\begin{aligned}
R^0 &= \{U \in T_k(V); x \in Y_U(h) \text{ wobei } h \in \mathcal{B}'^{\dim U}\},\\
R^1 &= \{((0) \underset{\neq}{\subset} U_0 \underset{\neq}{\subset} U_1 \underset{\neq}{\subset} V) \in T_k(V)^1; x \in Y_{U_i}(h_i) \text{ wobei } h_i \in \mathcal{B}'^{\dim U_i},\ i = 0,1\},\\
&\vdots\\
R^{d-2} &= \{((0) \underset{\neq}{\subset} U_0 \underset{\neq}{\subset} U_1 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} U_{d-2} \underset{\neq}{\subset} V) \in T_k(V)^{d-2}; x \in Y_{U_i}(h_i))\\
&\qquad \text{wobei } h_i \in \mathcal{B}'^{\dim U_i},\ i = 0, \ldots, d-2\}.
\end{aligned}
$$

Also ist $R^\bullet$ der zur partiell geordneten Untermenge $R^0 \subset T_k(V)$ zugehörige simpliziale Komplex. Wir wollen nun die Proposition 6.1 auf R^0 anwenden. Sei dazu

$$\overline{T_k(V)} := T_k(V) \cup \{(0), V\}.$$

Wir versehen $\overline{T_k(V)}$ ebenfalls mit der offensichtlichen partiellen Ordnungsstruktur, so daß $T_k(V)$ eine partiell geordnete Untermenge von $\overline{T_k(V)}$ ist. Sei nun $U_0 \in R^0$ ein minimales Element, d.h. U_0 enthält außer sich selbst kein anderes Objekt aus R^0. Betrachte die Abbildung

$$
\begin{aligned}
f : R^0 &\longrightarrow \overline{T_k(V)}\ .\\
U &\longmapsto U_0 + U
\end{aligned}
$$

Diese Abbildung stellt offenbar einen Morphismus von partiell geordneten Mengen dar, und es gilt

$$U \leq f(U) \geq U_0, \ \ \forall\, U \in R^0.$$

Nach der Proposition 6.2 reicht es also zu zeigen, daß das Bild von f in R^0 enthalten ist. Sei also $U \in R^0$, d.h für die zugehörige Unterfunktion $h \in \mathcal{B}^{\dim U}$ mit $x \in Y_U(h)$ gilt $h \in \mathcal{B}'$ (vgl. (2)). Sei h' die entsprechende Unterfunktion der Länge $\dim(f(U))$ mit $x \in Y_{f(U)}(h')$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}'$ genügt es die Ungleichung

$$\deg_x(f(U)) = \sum_x x h'(x) \geq \sum_x x h(x) = \deg_x(U) \tag{11}$$

zu zeigen. Beachte, daß wegen der Inklusion $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}^{ss}$ und der Identität $\deg_x(V) = 0$ der Fall $f(U) = V$ dann nicht möglich ist. Um die Ungleichung (11) zu zeigen, hat man die folgenden drei Fälle zu betrachten.

1. Fall: Es ist $U_0 \subset U$. Dann gilt

$$\deg_x(f(U)) = \deg_x(U).$$

2. Fall: Es ist $U_0 \cap U = (0)$. Dann gilt nach Korollar 1.10

$$\deg_x(f(U)) = \deg_x(U + U_0) \geq \deg_x(U) + \deg_x(U_0) > 0.$$

3. Fall: Es ist $U_0 \cap U \neq (0)$ und $U_0 \not\subset U$. Wegen der speziellen Wahl von U_0 hat man dann

$$\deg_x(U \cap U_0) \leq 0.$$

Somit gilt wiederum nach Korollar 1.10

$$\deg_x(f(U)) = \deg_x(U + U_0) \geq \deg_x(U) + \deg_x(U_0) - \deg_x(U \cap U_0) > 0. \square$$

7 Der Beweis der Sätze 4.1 und 4.2

Sei $I \subsetneq S$ eine Teilmenge. Für eine Zahl $0 \leq i \leq m_I := \max\{l(w); w \in \Omega_I\}$ definieren wir die Untermenge

$$\Omega_I^i = \{w \in \Omega_I; l(w) \leq i\}$$

von Ω_I.

Proposition 7.1 *Es gilt*

$$H^*_{ét}(Y_I) = \bigoplus_{w \in \Omega_I} \mathbb{Q}_\ell(-l(w))[-2l(w)]. \tag{12}$$

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 7.2 *Sei X eine Varietät über k und*

$$X = X^m \supset X^{m-1} \supset \cdots \supset X^1 \supset X^0 \supset X^{-1} = \emptyset$$

eine absteigende Sequenz von abgeschlossenen Untervarietäten über k. Sei für jedes $0 \leq i \leq m$

$$X^i \setminus X^{i-1} = \coprod_{J_i} \mathbb{A}^i_k$$

eine endliche direkte Summe von standard-affinen Räumen der Dimension i bzgl. einer Indexmenge J_i. Dann gilt

$$H^*_c(X) = \bigoplus_{i=0}^{m} H^*_c(X^i \setminus X^{i-1}) = \bigoplus_{i=0}^{m} \bigoplus_{J_i} H^{2i}_c(\mathbb{A}^i_k) = \bigoplus_{i=0}^{m} \bigoplus_{J_i} \mathbb{Q}_\ell(-i)[-2i].$$

Beweis: Es gilt

$$H^j_c(\mathbb{A}^i_k) = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell(-i) & j = 2i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Kohomologie von $\mathbb{A}^i_k$ also im Grad $2i$ konzentriert ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus der sukzessiven Anwendung der langen exakten Kohomologiesequenzen zu den Tripeln

$$X^i \setminus X^{i-1} \hookrightarrow X^i \hookleftarrow X^{i-1}. \square$$

Beweis von Proposition 7.1: Für eine Zahl $0 \leq i \leq m_I$ definieren wir die folgenden Untermengen von Y_I :

$$Y^i_I := \bigcup_{w \in \Omega^i_I} BwP_\mu/P_\mu.$$

Offenbar ist diese Untervarietät der Durchschnitt von Y_I und der Varietät $\bigcup_{\substack{w \in W \\ l(w) \leq i}} BwP_\mu/P_\mu$. Letztere ist aber abgeschlossen in $\mathscr{F}_g$. Also handelt es sich bei den Y^i_I um abgeschlossene Untervarietäten der Y_I. Wir erhalten somit eine absteigende Sequenz von abgeschlossenen Untervarietäten

$$Y_I = Y^{m_I}_I \supset Y^{m_I-1}_I \supset \cdots \supset Y^0_I \supset Y^{-1}_I := \emptyset.$$

Wegen der Abschlußeigenschaft der Bruhatzellen bzgl. der Bruhatordnung zerlegen sich die $Y^i_I \setminus Y^{i-1}_I$ in die direkte Summe ihrer Bruhatzellen, d.h.

$$Y^i_I \setminus Y^{i-1}_I = \coprod_{\substack{w \in \Omega_I \\ l(w)=i}} BwP_\mu/P_\mu \ , \ i = 0, \ldots, m_I.$$

Nun sind die Bruhatzellen BwP_μ/P_μ aber standard-affine Räume der Dimension $l(w)$. Die Anwendung von Lemma 7.2 liefert die Behauptung. $\square$

Im folgenden soll für ein Weylgruppenelement $w \in W^\mu$ und eine Teilmenge $I \subset S$ mit $H(Y_I, w)$ der Beitrag von w zur direkten Summe (12) bezeichnet werden. Es ist also

$$H(Y_I, w) = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell(-l(w))[-2l(w)] & : \quad w \in \Omega_I \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} . \tag{13}$$

Dann gilt offenbar

$$H^*_{ét}(Y_I) = \bigoplus_{w \in W^\mu} H(Y_I, w). \tag{14}$$

Seien nun $I \subset J$ zwei echte Teilmengen von S. Dann ist Y_I abgeschlossen in Y_J. Wir betrachten den Restriktionshomomorphismus

$$\phi_{I,J} : H^*_{ét}(Y_J) \longrightarrow H^*_{ét}(Y_I).$$

Wegen (14) erhalten wir eine Graduierung von $\phi_{I,J}$,

$$\phi_{I,J} = \bigoplus_{(w,w') \in W^\mu \times W^\mu} \phi_{w,w'} : \bigoplus_{w \in W^\mu} H(Y_J, w) \longrightarrow \bigoplus_{w' \in W^\mu} H(Y_I, w').$$

Aus der Konstruktion in Lemma 7.2 ergeben sich für die $\phi_{w,w'}$ folgende Werte:

$$\phi_{w,w'} = \begin{cases} id & : \quad w = w' \\ 0 & : \quad w \neq w' \end{cases} . \tag{15}$$

Vor dem Beweis von Satz 4.1 benötigen wir noch ein Resultat von Lehrer bzw. Björner. Wir konstruieren einen Komplex, der analog zur Sequenz $(*)$ aufgebaut ist. Seien $I \subset J \subset S$ zwei Teilmengen mit $\#(J \setminus I) = 1$. Wir erhalten dann einen Homomorphismus

$$p_{I,J} : i^G_{P_J} \longrightarrow i^G_{P_I},$$

welcher durch die Surjektion $(G/P_I)(k) \longrightarrow (G/P_J)(k)$ gegeben wird. Für zwei beliebige Mengen $I, J \subset S$ mit $\#J - \#I = 1$ definieren wir

$$d_{I,J} = \begin{cases} (-1)^i p_{I,J} & J = I \cup \{s_i\} \\ 0 & I \not\subset J \end{cases} .$$

Wir erhalten somit für jedes $I_0 \subset S$ einen $\mathbb{Z}$-indizierten Komplex

$$K^\bullet_{I_0} : 0 \to i^G_G \to \bigoplus_{\substack{I_0 \subset I \subset S \\ \#(S \setminus I) = 1}} i^G_{P_I} \to \bigoplus_{\substack{I_0 \subset I \subset S \\ \#(S \setminus I) = 2}} i^G_{P_I} \to \ldots \to \bigoplus_{\substack{I_0 \subset I \subset S \\ \#(S \setminus I) = \#(S \setminus I_0) - 1}} i^G_{P_I} \to i^G_{P_{I_0}},$$

in dem die Differentiale durch die $d_{I,J}$ gegeben werden. Dabei steht die Komponente i^G_G im Grad -1. Der Komplex $K^\bullet_{I_0}$ identifiziert sich, bis auf den Term i^G_G, gerade mit demjenigen Kettenkomplex mit Werten in $\mathbb{Q}_\ell$, welcher durch den simplizialen Komplex Δ_{I_0} aus [11] bzw. [2] induziert wird.

Satz 7.3 ([11] 4.3 bzw. [2] 4.2) *Der Komplex* $K^\bullet_{I_0}$ *ist azyklisch.*

Wir erwähnen auch folgendes wohlbekanntes Lemma.

Lemma 7.4 *Jede Erweiterung des* $Gal(\overline{k}/k)$*-Moduls* $\mathbb{Q}_\ell(m)$ *durch* $\mathbb{Q}_\ell(n)$ *mit* $m \neq n$ *zerfällt.*

Nun haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um Satz 4.1 zu beweisen.

Beweis von Satz 4.1: Wir setzen

$$\overline{Y(\mathcal{B}')} := Y(\mathcal{B}') \times_k \overline{k} \text{ bzw. } \overline{\Phi_{g,I}} = \Phi_{g,I} \times_k id_{\overline{k}}.$$

Wir betrachten die aus der exakten Sequenz $(*)$ resultierende Spektralsequenz

$$E_1^{p,q} = H^q_{ét}(\overline{Y(\mathcal{B}')}, \bigoplus_{\substack{I\subset S\\ \#(S\setminus I)=p+1}} \bigoplus_{g\in(G/P_I)(k)} (\overline{\phi_{g,I}})_*(\overline{\phi_{g,I}})^*\mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H^{p+q}_{ét}(\overline{Y(\mathcal{B}')}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= H^q_{ét}(\overline{Y(\mathcal{B}')}, \bigoplus_{\substack{I\subset S\\ \#(S\setminus I)=p+1}} \bigoplus_{g\in(G/P_I)(k)} (\overline{\phi_{g,I}})_*(\overline{\phi_{g,I}})^*\mathbb{Q}_\ell) \\ &= \bigoplus_{\substack{I\subset S\\ \#(S\setminus I)=p+1}} \bigoplus_{g\in(G/P_I)(k)} H^q_{ét}(\overline{Y_I}, (\overline{\phi_{g,I}})^*\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{\substack{I\subset S\\ \#(S\setminus I)=p+1}} \bigoplus_{(G/P_I)(k)} H^q_{ét}(Y_I). \end{aligned}$$

Die Anwendung von (14) und (15) liefert eine Zerlegung des E_1-Terms der Spektralsequenz in Unterkomplexe

$$E_1 = \bigoplus_{w\in W^\mu} E_{1,w}$$

mit

$$E_{1,w}^{p,q} = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{I\subset S\\ \#(S\setminus I)=p+1}} \bigoplus_{(G/P_I)(k)} H(Y_I, w) & q = 2l(w) \\ 0 & q \neq 2l(w) \end{cases}.$$

Also ist $E_{1,w}$ der Unterkomplex

$$E_{1,w} : \bigoplus_{\substack{I\subset S\\ \#(S\setminus I)=1}} \bigoplus_{(G/P_I)(k)} H(Y_I, w) \to \bigoplus_{\substack{I\subset S\\ \#(S\setminus I)=2}} \bigoplus_{(G/P_I)(k)} H(Y_I, w) \to \ldots \to \bigoplus_{(G/B)(k)} H(Y_\emptyset, w).$$

Für eine Teilmenge $I \subsetneq S$ gilt nach (7) und (13)

$$H(Y_I, w) = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell(-l(w))[-2l(w)] & : \quad I_w \subset I \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Deshalb vereinfacht sich $E_{1,w}$ zu

$$E_{1,w} : \Big(\bigoplus_{\substack{I_w \subset I \\ \#(S \setminus I)=1}} i_{P_I}^G \to \bigoplus_{\substack{I_w \subset I \\ \#(S \setminus I)=2}} i_{P_I}^G \to \ldots \to i_{P_{I_w}}^G \Big)(-l(w))[-2l(w)].$$

Also stimmt $E_{1,w}$ bis auf den Term i_G^G, dem Tate-Twist $(-l(w))$ und dem Shift $[-2l(w)]$ überein mit dem Komplex $K_{I_w}^\bullet$. Genauer gesagt haben wir die folgende exakte Sequenz von Komplexen:

$$0 \to i_G^G(-l(w))[-2l(w)+1] \to K_{I_w}^\bullet(-l(w))[-2l(w)] \to E_{1,w} \to 0.$$

Somit ergeben sich für den $E_{2,w}$-Term nachstehende drei Fälle:

$$\begin{array}{rclcl}
I_w = S & : & E_{2,w}^{p,q} & = & 0 \;\; p \geq 0, q \geq 0 \\[2ex]
\#(S \setminus I_w) = 1 & : & E_{2,w}^{0,2l(w)} & = & i_{P_{I_w}}^G(-l(w)) \\[2ex]
 & & E_{2,w}^{p,q} & = & 0 \;\; (p,q) \neq (0, 2l(w)) \\[2ex]
\#(S \setminus I_w) > 1 & : & E_{2,w}^{0,2l(w)} & = & i_G^G(-l(w)) \\[2ex]
 & & E_{2,w}^{j,2l(w)} & = & 0 \;\; j = 1, \ldots, \#(S \setminus I_w) - 2 \\[2ex]
 & & E_{2,w}^{j,2l(w))} & = & v_{P_{I_w}}^G(-l(w)) \;\; j = \#(S \setminus I_w) - 1 \\[2ex]
 & & E_{2,w}^{p,q} & = & 0 \;\; q \neq 2l(w) \text{ oder } p > \#(S \setminus I_w) - 1.
\end{array}$$

Nun haben die $E_2^{p,q} \neq (0)$ den Tate-Twist $-\frac{q}{2}$. Da aber jeder Homomorphismus von Galois-Moduln unterschiedlichen Tate-Twistes trivial ist, stellt der E_2-Term bereits den E_∞-Term dar. Zusammengefaßt gilt also für jedes $n \geq 0$

$$gr^p(H_{ét}^n(Y(\mathcal{B}'), \mathbb{Q}_\ell) = E_\infty^{p,n-p} = E_2^{p,n-p} = \bigoplus_{w \in W^\mu} E_{2,w}^{p,n-p}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{\substack{w \in W^\mu, \#(S \setminus I_w)=1 \\ 2l(w)=n}} i_{P_{I_w}}^G(-l(w)) \oplus \bigoplus_{\substack{w \in W^\mu, \#(S \setminus I_w)>1 \\ 2l(w)=n}} i_G^G(-l(w)) & : \quad p = 0 \\ \displaystyle\bigoplus_{\substack{w \in W^\mu \\ 2l(w)+\#(S \setminus I_w)-1=n}} v_{P_{I_w}}^G(-l(w)) & : \quad p > 0 \end{cases}$$

Nun sind aber nach Lemma 7.4 Erweiterungen von $\mathbb{Q}_\ell(m)$ durch $\mathbb{Q}_\ell(n)$ mit $m \neq n$ trivial. Somit gilt

$$H^n_{ét}(Y(\mathcal{B}')) \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} gr^p(H^n_{ét}(Y(\mathcal{B}')))$$

$$= \bigoplus_{\substack{w \in W^\mu, \#(S \setminus I_w)=1 \\ 2l(w)=n}} i^G_{P_{I_w}}(-l(w)) \oplus \bigoplus_{\substack{w \in W^\mu, \#(S \setminus I_w)>1 \\ 2l(w)=n}} i^G_G(-l(w)) \oplus \bigoplus_{\substack{w \in W^\mu \\ 2l(w)+\#(S \setminus I_w)-1=n}} v^G_{P_{I_w}}(-l(w)).$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Indem wir das Ergebnis von Satz 4.1 verwenden, läßt sich nun Satz 4.2 beweisen.

Beweis von Satz 4.2: Es soll zunächst der Homomorphismus

$$i^* : H^*_{ét}(\mathcal{F}_g) \longrightarrow H^*_{ét}(Y(\mathcal{B}'))$$

bestimmt werden, der durch die Inklusion $Y(\mathcal{B}') \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{F}_g$ induziert wird. Dann folgt nämlich, wie wir sehen werden, die Behauptung unmittelbar aus der zum Tripel

$$\mathcal{F}_g(\mathcal{B}') \hookrightarrow \mathcal{F}_g \hookleftarrow Y(\mathcal{B}')$$

gehörigen langen exakten Kohomologiesequenz. Betrachte den Doppelkomplex $(\tilde{E}_1^\bullet, \partial^\bullet, \partial'^\bullet)$ definiert durch

$$\tilde{E}_1^{\,p,q} = \begin{cases} H^q_{ét}(\mathcal{F}_g) = \bigoplus\limits_{\substack{w \in W^\mu \\ 2l(w)=q}} \mathbb{Q}_\ell(-l(w))[-2l(w)] & p = 0 \\ \qquad\qquad 0 & p > 0 \end{cases},$$

$$(\partial^{p,q} : \tilde{E}_1^{\,p,q} \longrightarrow \tilde{E}_1^{\,p+1,q}) = 0 \ \ \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

$$(\partial'^{p,q} : \tilde{E}_1^{\,p,q} \longrightarrow \tilde{E}_1^{\,p,q+1}) = 0 \ \ \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Offenbar definiert $\tilde{E}_1^\bullet$ eine Spektralsequenz, welche gegen $H^*_{ét}(\mathcal{F}_g)$ konvergiert. Sei für jedes $I \subset S$ mit $\#(S \setminus I) = 1$

$$D^*_I : H^*_{ét}(\mathcal{F}_g) \longrightarrow \bigoplus_{(G/P_I)(k)} H^*_{ét}(Y_I)$$

der Diagonalhomomorphismus, der durch die abgeschlossene Immersion $Y_I \hookrightarrow \mathcal{F}_g$ induziert wird. Betrachte den Morphismus von Doppelkomplexen

$$f_1^\bullet : \tilde{E}_1^\bullet \longrightarrow E_1^\bullet$$

definiert durch

$$f_1^{p,q} = \begin{cases} \oplus_I D_I^q & : \quad p = 0 \\ 0 & : \quad p > 0. \end{cases}$$

Bezeichne mit $s(E_1)^\bullet$ bzw. $s(\tilde{E}_1)^\bullet$ die assoziierten einfachen Totalkomplexe und mit

$$s(f_1^\bullet) : s(\tilde{E}_1)^\bullet \longrightarrow s(E_1)^\bullet$$

den durch $f_1^\bullet$ induzierten Homomorphismus. Bezeichne mit $\mathrm{cone}(s(f_1^\bullet))^\bullet$ den Kegel von $s(f_1^\bullet)$. Offenbar identifiziert sich $s(f_1^\bullet)$ in der Kohomologie gerade mit dem Homomorphismus

$$i^* : H^*_{\acute{e}t}(\mathcal{F}_g) \longrightarrow H^*_{\acute{e}t}(Y(\mathcal{B}')).$$

Deshalb berechnet die Kohomologie des geshifteten Kegels $\mathrm{cone}(s(f_1^\bullet))^\bullet[-1]$ die gewünschten Kohomologiegruppen $H_c^n(\mathcal{F}_g(\mathcal{B}')), n \geq 0$. Wie man sofort verifiziert gilt aber

$$\mathrm{cone}(s(f_1^\bullet))^\bullet = \bigoplus_{w \in W^\mu} K^\bullet_{I_w}(-l(w))[-2l(w)].$$

Unter Ausnutzung der Gleichheit $K_{I_w}^{-1} = i_G^G$ folgt die Behauptung. □

Mathematisches Institut der Universität zu Köln
Weyertal 86-90, 50931 Köln, Deutschland
e-mail: sorlik@mi.uni-koeln.de

Literatur

[1] Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres IV-VI.*, Hermann, Paris (1968).

[2] A. Björner, *Some Combinatorial and Algebraic Properties of Coxeter Complexes and Tits Buildings*, Adv. in Math. **52**, 173-212 (1984).

[3] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. **103**, 103-161 (1976)

[4] G. Faltings und G. Wüstholz, *Diophantine approximations on projective spaces*, Invent. Math. **116**, 109-138 (1994)

[5] J.-M. Fontaine, *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, Astérisque **65**, 3-80 (1979)

[6] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Recognizing Schubert cells*, preprint math.CO/9807079 (1998)

[7] P. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds I,II*, Amer. J. math., vol **90**, 568-626 und 805-865 (1986).

[8] G. Harder, M.S. Narasimhan, *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles*, Math. Ann. **212** , 215-248 (1975).

[9] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics **29**, Cambridge University Press (1990)

[10] J.C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Pure and applied mathematics **Vol. 131**, Academic Press 1987.

[11] G.I. Lehrer, *The Spherical Building and Regular Semisimple Elements*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. **27** , 361-379 (1983).

[12] V. Lakshmibai, P. Magyar, *Degeneracy schemes and Schubert varieties*, preprint math.alg-geom/9709018 (1997)

[13] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag (1965)

[14] S. Orlik, *Semistabilität von gewichtet filtrierten Vektorräumen*, Diplomarbeit Wuppertal (1996).

[15] P. Orlik, H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren **300**, Springer 1992.

[16] D. Quillen, *Homotopy Properties of the Poset of Nontrivial p-Subgroups of a Group*, Advances in Math. **28**, 101-128 (1978).

[17] M. Rapoport, *Period domains over finite and local fields*, Proc. Symp. Pure math. **62(pt1)**, 361-381 (1997).

[18] M. Rapoport, *Analogien zwischen den Modulräumen von Vektorbündeln und von Flaggen*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **99**, No 4, 164-180 (1997).

[19] M. Rapoport, *Two letters to B. Totaro*, april 1994.

[20] M. Rapoport, T. Zink, *Period Spaces for p-divisible Groups*, Ann. of Math. Stud. **141**, Princeton University Press 1996.

[21] L. Solomon, *The Steinberg character of a finite group with* (B, N)*-pair*, in „Theory of Finite Groups“, ed. R. Brauer, C.H. Sah, W.A. Benjamin 1969.

[22] P. Schneider, U. Stuhler, *The cohomolgoy of p-adic symmetric spaces*, Invent. math. **105**, 47-122 (1991).