Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 12/13

Lineare Algebra II

5. Übungsblatt

Aufgabe 1: (4 Punkte) Sei K ein Körper.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in K^{n\times n}$ nilpotent. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in $K^{3\times 3}$ nilpotent sind:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte) Berechnen Sie die dritte Wurzel von der hermiteschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 3: (2 + 3 = 5 Punkte) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie hermitesche Matrizen $H_1, H_2 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $A = H_1 + iH_2$.

(b) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von A, d.h. bestimmen Sie eine hermitesche positiv semidefinite Matrix $H \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = HU.$$

Aufgabe 4: $(2 + 3 = 5$ Punkte) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Jede Drehung in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist das Produkt von zwei Spiegelungen.

(b) Seien nun $f \in \mathrm{O}(V)$, $v \in V - \{0\}$ und $D \in \mathrm{O}(V)$ eine Drehung. Zeigen Sie, dass $f \circ D \circ f^{-1}$ eine Drehung ist.