Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 12/13

Lineare Algebra II

4.Übungsblatt

Aufgabe 1: (4 Punkte) Seien V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, daß f genau dann unitär ist, wenn eine Orthonormalbasis von V existiert, die aus Eigenvektoren von f zu Eigenwerten vom Betrag gleich 1 besteht.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(a) $f \circ f^{\mathrm{ad}}$ und $f^{\mathrm{ad}} \circ f$ sind hermitesch.

(b) $f \circ f^{\mathrm{ad}}$ und $f^{\mathrm{ad}} \circ f$ sind positiv semi-definit.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^4$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Welche der folgenden Matrizen sind normal, welche sind unitär und welche sind hermitesch?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0- \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & i & i & i \\ -i & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ -i & 0 & \sqrt{5} & -i \\ -i & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$