Prof. Dr. S. Orlik **WS 12/13**
Dr. M. Bender

Lineare Algebra II

3.Übungsblatt

Die Teilnehmer der Donnerstagsübung benutzen bitte das Postfach 70 auf D.10.

Aufgabe 1: $(2 + 2 = 4$ Punkte) Bestimmen Sie mittels des Gram-Schmidtschen Verfahrens aus der Basis $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis für die Räume $(V, (-,-))$, wobei

(a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = \mathbb{C}^3$ und

$(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x, y) := \sum_{i=1}^{3} \overline{x_i} y_i,$ ist.

(b) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}, \quad V = \mathbb{R}^{\leq 2}[X] = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq 2\}$ und

$(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) := \int_0^1 f(X)g(X)\, dX,$ ist.

Aufgabe 2: $(1 + 2 + 2 = 5$ Punkte) Es seien V ein euklidischer oder unitärer K-Vektorraum, $f, g \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{id}^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}$.

(b) $(g \circ f)^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} \circ g^{\mathrm{ad}}$.

(c) $(f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f$.

Aufgabe 3: $(1 + 2 + 2 = 5$ Punkte) Es seien V ein euklidischer oder unitärer K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

(a) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

(b) $\mathrm{Kern}(f^{\mathrm{ad}}) = (\mathrm{Bild}(f))^{\perp}$.

(c) $\mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}}) = (\mathrm{Kern}(f))^{\perp}$.