Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 12/13

Lineare Algebra II

2.Übungsblatt

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei $(V, (-,-))$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, daß

$$|| - || : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ||x|| := \sqrt{(x,x)},$$

eine Norm auf V definiert.

Aufgabe 2: (3 + 1 = 4 Punkte)
Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $V = (\mathbb{R}^n, (-,-))$, wobei $(-,-)$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(a) Für $x, y \in V$, $x, y \neq 0$, definieren wir den Winkel zwischen x und y, $\varphi_{x,y} \in [0, 2\pi)$, durch

$$\varphi_{x,y} := \arccos \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

Zeigen Sie, daß $\varphi_{x,y}$ mit der Anschauung übereinstimmt, falls $n = 2$ ist.

(b) Sei $n = 3$. Zeigen Sie, daß $||x||$ mit der Länge von x übereinstimmt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, (-,-))$, wobei $(-,-)$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$ des Untervektorraums

$$U = \quad < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} > \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Wir betrachten die geordnete $\mathbb{R}$-Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf (v_1, v_2, v_3) an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu erhalten.