Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 12/13

Lineare Algebra II

1.Übungsblatt

Aufgabe 1: (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte) Seien $z, z' \in \mathbb{C}$. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $\mid z \cdot z' \mid = \mid z \mid \cdot \mid z' \mid$.

(b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

(c) $z \cdot \overline{z} = \mid z \mid^2$.

(d) $\overline{\overline{z}} = z$.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2$, zusammen mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$ ist.

Aufgabe 3: (2 + 2 = 4 Punkte)

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(2 + 3i) + (4 + 7i), \quad (1 + i)(1 - i), \quad (1 + i)^4, \quad \frac{1}{(1 + i)^4}.$$

(b) Es sei $z = 5\sqrt{3} + 5i$. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von

$$z, \quad \overline{z}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{\overline{z}}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Es seien $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$,

$$V_1 = K^n \text{ und } V_2 = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}.$$

Zeigen Sie, daß die folgenden Abbildungen Skalarprodukte sind:

(a) $V_1 \times V_1 \to K, \quad (x, y) := \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$.

(b) $V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}, \quad (f, g) := \int_0^1 fg(t)\, \mathrm{d}t$.