



## 4. Übungsblatt

**Abgabe:** Mittwoch, 11.5.2011, zu Beginn der Übung

Geben Sie die Lösungen zu Theorieaufgaben bitte in der Übung ab und senden Sie Ihre Programme bis 14 Uhr per Email an [krypto@studs.math.uni-wuppertal.de](mailto:krypto@studs.math.uni-wuppertal.de).

**Aufgabe 11** (Primzahlen, 2 Punkte)

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $i \in \mathbb{N}$  mit  $0 < i < p$ . Zeigen Sie, dass  $p$  ein Teiler des Binomialkoeffizient  $p$  über  $i$  ist.

Erinnerung: Für  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq k$  ist der Binomialkoeffizient  $n$  über  $k$  definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Aufgabe 12** (Primfaktorzerlegung, 2 Punkte)

Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung von 123 480 000.

**Aufgabe 13** (Primfaktorzerlegung und Teilbarkeit, 4 Punkte)

Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ . Seien

$$\begin{aligned} a &= p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r} \\ b &= p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r} \end{aligned}$$

Primfaktorzerlegungen von  $a$  und  $b$  (also  $p_1, \dots, p_r$  sind Primzahlen mit  $p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$  und  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_0$  und  $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0$ ).

- Zeigen Sie, dass  $\text{ggT}(a, b) = p_1^{s_1} \cdot \dots \cdot p_r^{s_r}$  mit  $s_i := \min(m_i, n_i)$ .
- Das Minimum der Menge  $\{x \in \mathbb{N} \mid a|x \text{ und } b|x\}$  heißt das *kleinste gemeinsame Vielfache* von  $a$  und  $b$  und wird mit  $\text{kgV}(a, b)$  bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\text{kgV}(a, b) = p_1^{t_1} \cdot \dots \cdot p_r^{t_r} \quad \text{mit } t_i := \max(m_i, n_i).$$

**Aufgabe 14** (Sieb des Eratosthenes, 6 Punkte)

- Zeigen Sie, dass jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , das keine Primzahl ist, einen Primteiler  $p \leq \sqrt{n}$  hat.
- Das Sieb des Eratosthenes bestimmt alle Primzahlen unterhalb einer gegebenen Schranke  $C \in \mathbb{N}$ . Es funktioniert wie folgt:
  - Schreibe die Liste  $2, 3, 4, 5, \dots, C$  von ganzen Zahlen auf.
  - Iteriere den folgenden Prozess für alle  $i = 2, \dots, \sqrt{C}$ :  
Falls  $i$  noch in der Liste ist, dann lösche alle echten Vielfachen  $2i, 3i, \dots$  von  $i$  aus der Liste.

Zeigen Sie, dass die Zahlen, die in der Liste bleiben, die gesuchten Primzahlen sind.

- Schreiben Sie ein Programm, das das Sieb des Eratosthenes implementiert.