Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz

WiSe 2012/13

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

9. Übungsblatt
Abgabe am 09.01.2013 in der Übung

Bei den durch „ $*$ “ gekennzeichneten Aufgaben 1 und 5 auf diesem Übungsblatt handelt es sich um Zusatzaufgaben, durch deren erfolgreiche Bearbeitung Sie Bonuspunkte erlangen können.

Aufgabe 1.* (4 Punkte) Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf einem topologischen Raum X. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Es ist $\ker(f) = 0$ als Garbe.

ii) Für jedes $U \subset X$ offen ist $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv.

iii) Für jedes $x \in X$ offen ist $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ injektiv.

iv) Ist $\mathcal{H}$ eine Garbe auf X und sind $h_1, h_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ Morphismen von Garben mit $f \circ h_1 = f \circ h_2$, dann gilt $h_1 = h_2$.

Aufgabe 2. $(2+2+2 = 6$ Punkte) Sei X eine irreduzible k-Varietät. Zeigen Sie:

a) Die offenen Mengen von X bilden ein filtriertes angeordnetes System.

b) Es ist $\varinjlim_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{O}_X(U)$ ein Körper (der sogenannte Funktionenkörper $k(X)$ von X).

c) Ist X affin, so gilt $k(X) = Quot(k[X])$.

Aufgabe 3. ($2+2=4$ Punkte) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie:

a) Es ist $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$ eine affine Varietät und es gilt $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\} \not\cong \mathbb{A}_k^1$.

b) Es ist $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0,0)\}$ keine affine Varietät.

Aufgabe 4. ($2+2=4$ Punkte) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(k) = p > 0$ und sei $\varphi : \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^1$ der durch $x \to x^p$ gegebene Morphismus (der sogenannte Frobenius-Morphismus von $\mathbb{A}_k^1$). Zeigen Sie:

a) φ ist ein Homöomorphismus topologischer Räume.

b) φ ist kein Isomorphismus von Varietäten.

Aufgabe 5.* ($2+2=4$ Punkte) Sei $\mathcal{G}$ eine Unterprägarbe einer Garbe $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}^\sharp$ als Untergarbe von $\mathcal{F}$ realisiert werden kann, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{H}(U) = \left\{ s \in \mathcal{F}(U) \mid \exists U = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ (off. Überd.) } \forall i \in I : s \mid U_i \in \mathcal{G}(U_i) \right\},$$

für $U \subset X$ offen, eine Garbe $\mathcal{H}$ auf X definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $\mathcal{G}^\sharp \cong \mathcal{H}$ von Garben auf X exisitiert.