Prof. Dr. S. Orlik **WiSe 2012/13**
MSc M. Kuschkowitz

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra"

8. Übungsblatt

Abgabe am 19.12.2012 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei X ein topologischer Raum und sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf X.
Zeigen Sie, dass die Prägarbe $U \mapsto \ker(f(U))$, $U \subset X$ offen, eine Garbe ist.

Aufgabe 2. ($4 + 4^* = 8$ Punkte) Sei X ein topologischer Raum und sei A eine abelsche Gruppe.

a) Sei A_X die zur konstanten Prägarbe auf X mit Werten in A assoziierte Garbe. Zeigen Sie, dass

$$A_X(U) \cong \{f : U \to A \mid f \text{ lokal konstant}\}$$

für $U \subset X$ offen.

b) Sei $x \in X$ und sei $i : \{x\} \to X$ die Inklusion. Sei $A_{\{x\}}$ die entsprechende konstante Garbe auf $\{x\}$. Berechnen Sie die Halme von $i_* A_{\{x\}}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei R ein Ring, sei $(M_i, f_{ij})_{i,j \in I}$ ein induktives System von R-Moduln und sei $M = \varinjlim_{i \in I} M_i$ der induktive Limes. Ferner sei $S \subset R$ ein multiplikatives System, sei $S^{-1}M_i$ die Lokalisierung von M_i nach S und sei $S^{-1}f_{ij} : S^{-1}M_i \to S^{-1}M_j$ der durch f_{ij} auf den Lokalisierungen induzierte Homomorphismus.
Zeigen Sie, dass $(S^{-1}M_i, S^{-1}f_{ij})_{i,j \in I}$ ein induktives System von $S^{-1}R$-Moduln ist und dass $\varinjlim_{i \in I} S^{-1}M_i \cong S^{-1}M$ gilt.

Aufgabe 4. (2+2 = 4 Punkte) Sei $\mathfrak{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen, sei $I = \mathbb{N}$ versehen mit der Teilbarkeitsrelation und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gruppe μ_n definiert durch $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$ sei $f_{m,n} : \mu_m \to \mu_n$ gegeben durch die Inklusion.

a) Zeigen Sie, dass durch $(\mu_m, f_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ ein induktives System von $\mathfrak{Ab}$ über $\mathbb{N}$ definiert ist.

b) Beschreiben Sie den induktiven Limes des Systems aus Teil a).