Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz

WiSe 2012/13

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

7. Übungsblatt
Abgabe am 12.12.2012 in der Übung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. ($2+2=4$ Punkte) Sei $X = V(Y^2 - X^3) \subset k^2$.

a) Zeigen Sie, dass der Morphismus

$$\begin{array}{rccc} f & : & k & \to & X \\ & & x & \mapsto & (x^2, x^3) \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

b) Entscheiden Sie, ob f ein Isomorphismus von affinen algebraischen k-Varietäten ist.

Aufgabe 2. ($2+2=4$ Punkte) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

a) Ist X noethersch, so ist jede offene Teilmenge $U \subset X$ quasikompakt.

b) Ist X irreduzibel, so ist jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ dicht in X.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $X = k^2$ und sei

$$\phi : k[X] \to \mathcal{O}_X(X \setminus \{(0,0)\})$$

die Restriktionsabbildung. Entscheiden Sie, ob ϕ injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

(*Hinweis.* Benutzen Sie Aufgabe 2.)

Aufgabe 4. ($2+2=4$ Punkte) Sei $X \subset k^n$ Zariski-abgeschlossen und sei $f \in k[X]$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Es ist $D(f) \subset X$ dicht.

b) f ist ein Nichtnullteiler von $k[X]$ (d.h. für jedes $g \in k[X] \setminus \{0\}$ gilt $fg \neq 0$).

c) f ist in keinem minimalen Primideal von $k[X]$ enthalten.