Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz

WiSe 2012/13

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

6. Übungsblatt

Abgabe am 5.12.2012 in der Übung

Aufgabe 1. $(2 + 2 = 4$ Punkte) Sei X ein topologischer Raum und sei $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ eine endliche offene Überdeckung. Zeigen Sie:

a) Sind alle X_i noethersch, so auch X.

b) Sind alle X_i irreduzibel und gilt $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$, so ist auch X irreduzibel.

Aufgabe 2. $(2+2 = 4$ Punkte) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Eine Teilmenge $X \subset k^n$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(X) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Primideal ist.

b) Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann ist auch jede Teilmenge $Y \subset X$ mit der induzierten Zariski-Topologie noethersch.

Aufgabe 3. $(2+2 = 4$ Punkte) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei X eine affine algebraische k-Varietät. Zeigen Sie:

a) Die offenen Teilmengen $D(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset X$, wobei $f \in k[X]$, bilden eine Basis der Topologie von X.

b) Ist $f \in k[X]$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist f eine Einheit in $k[X]$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei

$$X = V(X_2^2 - X_1X_3, X_3^2 - X_2^3) \subset k^3.$$

Bestimmen Sie das Verschwindungsideal von X.