Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz

WiSe 2012/13

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

5. Übungsblatt

Abgabe am 28.11.2012 in der Übung

Sei R ein kommutativer Ring und sei K ein Körper.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Seien M, N Moduln über R und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass

$$S^{-1}(M \otimes_R N) \cong (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}N).$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) R ist reduziert.

ii) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ist $R_{\mathfrak{p}}$ reduziert.

iii) Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ ist $R_{\mathfrak{m}}$ reduziert.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Quot}(K[X_1, \ldots, X_n])$ als $K[X_1, \ldots, X_n]$-Algebra nicht endlich erzeugt ist.

(Hinweis. Der Ring $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist faktoriell.)

Aufgabe 4. $(2 + 2 = 4$ Punkte) Sei $I \subset K[X_1, X_2, X_3]$ das Ideal, welches von $f = (X_1 + 1)^2(X_2^2 - X_3)^3$ erzeugt wird.

a) Bestimmen Sie die minimalen I umfassenden Primideale von $K[X_1, X_2, X_3]$ und berechnen Sie das Radikal $\sqrt{I}$.

b) Beschreiben Sie im Fall $K = \mathbb{C}$ die Menge $V(I) \cap \mathbb{R}^3$ durch eine Skizze.