Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz **WiSe 2012/13**

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

3. Übungsblatt
Abgabe am 14.11.2012 in der Übung

Sei R ein kommutativer Ring, seien M, M', M'' Moduln über R und sei

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \tag{1}$$

eine Sequenz von R-Homomorphismen.

Aufgabe 1. $(2+2=4$ Punkte) Zeigen Sie:

a) Die Teilsequenz
$$0 \to M' \to M \to M''$$
von (1) ist genau dann exakt, wenn die induzierte Sequenz
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \to \mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M'') \tag{2}$$
für alle R-Moduln N exakt ist.

b) Die Teilsequenz
$$M' \to M \to M'' \to 0$$
von (1) ist genau dann exakt, wenn die induzierte Sequenz
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N) \tag{3}$$
für alle R-Moduln N exakt ist.

Aufgabe 2. $(2+2=4$ Punkte) Sei die Sequenz (1) exakt. Zeigen Sie:

a) Es ist M genau dann noethersch, wenn M' und M'' noethersch sind.

b) Sind M' und M'' endlich erzeugt, dann ist auch M endlich erzeugt.

Aufgabe 3. (2+2 = 4 Punkte) Seien zusätzlich N, P Moduln über R. Zeigen Sie:

a) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$.

b) $R \otimes_R N \cong N$.

Aufgabe 4. $(2 + 2 = 4$ Punkte)

a) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0.$$

b) Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume endlicher Dimension über K. Zeigen Sie, dass

$$\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W).$$