Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz

WiSe 2012/13

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

2. Übungsblatt

Abgabe am 7.11.2012 in der Übung

Sei R ein kommutativer Ring.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei I eine Menge und seien M_i für $i \in I$ sowie N Moduln über R. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$.

b) $\mathrm{Hom}_R(N, \prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei M ein R-Modul und sei $p : M \to M$ ein Projektor, d.h. p ist ein R-Homomorphismus mit der Eigenschaft $p^2 = p$. Zeigen Sie, dass

$$M \cong \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$$

gilt.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $\mathfrak{n} \subset R$ das Nilradikal. Zeigen Sie, dass ein Homöomorphismus

$$\mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{n})$$

existiert.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Geben Sie die Zariski-Topologie von $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ an.