Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz **WiSe 2012/13**

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

11. Übungsblatt
Abgabe am 23.01.2013 in der Übung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\varphi : \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^n$ definiert durch $\varphi((x_0, \ldots, x_n)) = [x_0 : \ldots : x_n]$. Zeigen Sie:

a) φ ist ein Morphismus von Varietäten.

b) Ist $Y \subset \mathbb{P}_k^n$ Zariski-abgeschlossen, $Y = V_+(I)$, für ein homogenes Ideal $I \subset k[X_0, \ldots, X_n]$, so ist $\varphi^{-1}(V) \cup \{0\} = V(I) \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$.

Aufgabe 2. ($2 + 2 + 2 = 6$ Punkte) Sei $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R_i$ ein graduierter Ring.

a) Sei $I \subset R$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass I genau dann ein Primideal ist, wenn für alle homogenen Elemente $f, g \in R$ gilt:

$$fg \in I \Rightarrow f \in I \text{ oder } g \in I.$$

b) Sei $P \subset R$ ein Primideal und sei $P^* \subset R$ das von den homogenen Elementen von P erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass P^* prim ist.
(*Hinweis.* Seien $f = \sum_{i=0}^r f_i, g = \sum_{j=0}^s g_j \subset R$ mit $fg \in P^*$. Betrachten Sie den jeweils höchsten Index i bzw. j mit $f_i \notin P^*$ bzw. $g_j \notin P^*$.)

c) Sei $I \subset R$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die minimalen I umfassenden Primideale homogen sind.

Aufgabe 3. ($2+2=4$ Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$, gegeben durch $\varphi([x_0 : x_1]) = [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3]$. Sei $C \subset \mathbb{P}^3_k$ das Bild von φ. Zeigen Sie:

a) φ ist wohldefiniert.

b) Es ist $C = V_+(I)$, wobei $I = (X_0X_3 - X_1X_2, X_1^2 - X_0X_2, X_2^2 - X_1X_3) \subset k[X_0, X_1, X_2, X_3]$.

c) Es ist $I(C) = I$.