Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz **WiSe 2012/13**

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

10. Übungsblatt
Abgabe am 16.01.2013 in der Übung

Bei der durch „ $*$ “ gekennzeichneten Aufgabe 2 auf diesem Übungsblatt handelt es sich um eine Zusatzaufgabe, durch deren erfolgreiche Bearbeitung Sie Bonuspunkte erlangen können.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $X = (X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Varietät, sei $Y \subset X$ abgeschlossen und sei $U \subset X$ offen. Die lokal abgeschlossene Teilmenge

$$Z = Y \cap U \subset X$$

kann auf zwei Arten als Untervarietät von X aufgefasst werden, nämlich entweder als offene Untervarietät von Y oder als abgeschlossene Untervarietät von U. Zeigen Sie, dass durch beide Konstruktionen dieselbe Struktur von Z als Varietät definiert wird.

Aufgabe 2.* (4 Punkte) Sei $X = (X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Varietät, sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät und sei $i : Y \to X$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_Y \cong i^{-1}\mathcal{O}_X$ gilt.

Aufgabe 3. $(3 + 3 = 6$ Punkte) Sei $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R_i$ ein graduierter Ring.

a) Sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   i) I wird durch homogene Elemente erzeugt.

ii) Für jedes $a \in I$ gehören auch die homogenen Komponenten von a zu I.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so heißt I homogen.

b) Seien $I, J \subset R$ homogene Ideale. Zeigen Sie, dass dann auch die Ideale

$$I + J, I \cap J, I \cdot J, \sqrt{I}$$

homogen sind.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei X eine k-Varietät und sei $Z \subset X$ lokal abgeschlossen. Zeigen Sie, dass für eine k-Varietät W die Menge der Morphismen von W nach Z mit der Menge der Morphismen $f : W \to X$, für die $f(W) \subset Z$ gilt, übereinstimmt.