Prof. Dr. S. Orlik
MSc M. Kuschkowitz

WiSe 2012/13

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

1. Übungsblatt

Abgabe am 30.10.2012 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte) Zeigen Sie unter Benutzung des Zornschen Lemmas, dass jeder K-Vektorraum eine Basis besitzt (K ein beliebiger Körper).

Aufgabe 2. ($2 + 2 = 4$ Punkte)

a) Sei $X = (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $Z \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{T}_Z = \{Y \cap Z \mid Y \in \mathcal{T}\}$$
eine Topologie auf Z definiert.

b) Sei X eine Menge mit $|X| \neq 0, 1$ und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Sei $\mathrm{id} : X \to X, \mathrm{id}(x) = x$, die identische Abbildung. Entscheiden Sie, für welche der folgenden Wahlen von $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die Abbildung id stetig ist:

1. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\text{triv}}$.
2. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\text{disk}}$.
3. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\text{triv}}, \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\text{disk}}$.
4. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\text{disk}}, \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\text{triv}}$.

Aufgabe 3. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei R ein kommutativer Ring, sei $x \in R$ nilpotent.

a) Zeigen Sie, dass $1 + x \in R^\times$.

b) Sei $u \in R^\times$. Zeigen Sie, dass $u + x \in R^\times$.

Aufgabe 4. $(2 + 2 = 4$ Punkte)

a) Sei K ein Körper und sei R ein kommutativer Ring. Bestimmen Sie die Einheitengruppen von $\mathbb{Z}[i]$ und $R[[X]]$ sowie die Nullteiler von $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ und $K[X]/(X^n)$.

b) Entscheiden Sie, welche der in a) genannten Ringe lokal sind.