Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 17/18

Kommutative Algebra

9. Übungsblatt

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: (4 Punkte) Sei $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die irreduziblen Komponenten von $V(I)$ genau den minimalen I umfassenden Primidealen entsprechen.

Aufgabe 2: $(2 + 2 = 4$ Punkte) Sei X ein topologischer Raum und sei $X = \cup_{i \in I} X_i$ eine endliche offene Überdeckung. Zeigen Sie:

(a) Sind alle X_i noethersch, so auch X.

(b) Sind alle X_i irreduzibel und gilt $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$, so ist auch X irreduzibel.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei X eine affine algebraische k-Varietät und sei $f \in k[X]$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f eine Einheit von $k[X]$ ist.

Aufgabe 4: $(3 + 2 + 1 + 1 = 7$ Punkte) Wir betrachten die Ideale

$$I = (X_1^2 + X_2X_3, X_1X_2 + X_2X_4, X_1X_3 + X_4X_3, X_3X_2 + X_4^2) \quad \text{und}$$

$$J = (X_1 + X_4, X_1X_4 - X_3X_2) \subseteq k[X_1, X_2, X_3, X_4].$$

Zeigen Sie:

(a) $V(I) = V(J)$.

(b) Durch die Zuordnung

$$k[X_1, X_2, X_3, X_4]/J \to k[Y_1^2, Y_2^2, Y_1Y_2],$$

$$X_i + J \mapsto \begin{cases} Y_1Y_2 & \text{falls } i = 1 \\ -Y_1^2 & \text{falls } i = 2 \\ Y_2^2 & \text{falls } i = 3 \\ -Y_1Y_2 & \text{falls } i = 4 \end{cases}$$

wird ein Isomorphismus von k-Algebren definiert.

(c) Folgern Sie, dass J ein Primideal ist.

(d) Folgern Sie, dass J das Verschwindungsideal von $V(I)$ ist.