Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 17/18

Kommutative Algebra

7. Übungsblatt

Sei stets R ein kommutativer Ring und k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) R ist reduziert.

(b) Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist $R_\mathfrak{p}$ reduziert.

(c) Für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ ist $R_\mathfrak{m}$ reduziert.

Aufgabe 2: ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei $I \subseteq k[X_1, X_2, X_3]$ das Ideal, welches von $f = (X_1 + 1)^2(X_2^2 - X_3)^3$ erzeugt wird.

(a) Bestimmen Sie die minimalen I umfassenden Primideale von $k[X_1, X_2, X_3]$ und berechnen Sie das Radikal $\sqrt{I}$.

(b) Beschreiben Sie im Fall $k = \mathbb{C}$ die Menge $V(I) \cap \mathbb{R}^3$ durch eine Skizze.

Aufgabe 3: ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei X ein topologischer Raum und sei $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ eine endliche offene Überdeckung von X. Zeigen Sie:

(a) Sind alle X_i noethersch, so auch X.

(b) Sind alle X_i irreduzibel und gilt $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, für alle $i, j \in I$, so ist auch X irreduzibel.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die R-Moduln $M/\mathfrak{m}M$ und $M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}M_\mathfrak{m}$ isomorph zueinander sind.