

Kommutative Algebra

6. Übungsblatt

Sei stets R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen.

Aufgabe 1: (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ ein flacher R -Modul ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien M, N Moduln über R . Zeigen Sie, dass

$$S^{-1}(M \otimes_R N) \simeq (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}N).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Zeigen Sie:

- (a) Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist $S^{-1}\mathfrak{a}$ ein Ideal in $S^{-1}R$.
- (b) Jedes Ideal in $S^{-1}R$ ist von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$.
- (c) Die Abbildung $\mathfrak{p} \rightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$ induziert eine Bijektion zwischen $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ und $\text{Spec}(S^{-1}R)$.
- (d) Sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Zeigen Sie, dass $(R - \mathfrak{p})^{-1}R$ ein lokaler Ring ist.