Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 17/18

Kommutative Algebra

5. Übungsblatt

Sei stets R ein kommutativer Ring.

Aufgabe 1: (4 Punkte) Sei N ein R-Modul. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) N ist flach.

(b) Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, so ist auch die Sequenz $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ exakt.

(c) Ist $f : M' \to M$ ein Monomorphismus von R-Moduln, so ist auch $f \otimes \mathrm{id} : M' \otimes N \to M \otimes N$ ein Monomorphismus.

Aufgabe 2: ($2+2 = 4$ Punkte) Seien N und P Moduln über R. Zeigen Sie:

(a) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$.

(b) $R \otimes_R N \simeq N$.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume endlicher Dimension über K. Zeigen Sie, dass

$$\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W).$$