**Prof. Dr. S. Orlik**
**Dr. M. Bender**

**WS 17/18**

# Kommutative Algebra

## 4. Übungsblatt

Sei $R$ ein kommutativer Ring, seien $M, M', M''$ Moduln über $R$ und sei

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \tag{1}$$

eine Sequenz von $R$-Homomorphismen.

**Aufgabe 1:** $(2 + 2 = 4$ Punkte)

**(a)** Die Teilsequenz

$$0 \to M' \to M \to M''$$

von (1) ist genau dann exakt, wenn die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \to \mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M'') \tag{2}$$

für alle $R$-Moduln $N$ exakt ist.

**(b)** Die Teilsequenz

$$M' \to M \to M'' \to 0$$

von (1) ist genau dann exakt, wenn die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N) \tag{3}$$

für alle $R$-Moduln $N$ exakt ist.

**Aufgabe 2:** $(2 + 2 = 4$ Punkte) Sei die Sequenz (1) exakt. Zeigen Sie:

**(a)** Es ist $M$ genau dann noethersch, wenn $M'$ und $M''$ noethersch sind.

**(b)** Sind $M'$ und $M''$ endlich erzeugt, dann ist auch $M$ endlich erzeugt.

**Aufgabe 3:** $(2 + 2 = 4$ Punkte)

**(a)** Geben Sie alle projektiven Untermoduln des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ an.

**(b)** Geben Sie alle projektiven Untermoduln des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ an.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte) Sei $R$ ein Ring derart, dass $R[X]$ noethersch ist. Ist $R$ noethersch?