Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

WS 17/18

Kommutative Algebra

3. Übungsblatt

Sei stets R ein kommutativer Ring.

Aufgabe 1: (4 Punkte) Sei I eine Menge und seien M_i für $i \in I$ sowie N Moduln über R. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$.

(b) $\mathrm{Hom}_R(N, \prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Sei $\varphi : S \to T$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ eine stetige Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(T) \to \mathrm{Spec}(S)$$

induziert.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei $\mathfrak{n} \subset R$ das Nilradikal. Zeigen Sie, dass ein Homöomorphismus

$$\mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{n})$$

existiert.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Geben Sie alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ an.