Bergische Universität Wuppertal **Wintersemester 17/18**
Prof. Dr. Sascha Orlik 25.10.2017

Übungen zur Kommutativen Algebra
Blatt 2

Aufgabe 1

Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal.
Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in R \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ein Ideal mit der Eigenschaft $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $R/\mathfrak{a}$ ist ein reduzierter Ring.

(b) Es gilt die Gleichheit $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass der Ring der formalen Potenzreihen $K[\![X]\!]$ für einen Körper K lokal ist.

(b) Für welche $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein lokaler Ring?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $x \in \mathbb{Z}$, welche simultan die Kongruenzen

$$4x \equiv 1 (mod 11)$$
$$5x \equiv 1 (mod 12)$$
$$6x \equiv 1 (mod 13)$$

erfüllen.

Abgabe in der Übung am Mittwoch, 08.11.2017.