Übungen zur Kommutativen Algebra
Blatt 1

Aufgabe 1

Zeigen Sie unter Verwendung des Zornschen Lemmas, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie unter Verwendung des Zornschen Lemmas, dass jeder kommutative Ring ein minimales Primideal bezüglich Inklusion besitzt.

Aufgabe 3

Sei R ein kommutativer Ring und $x \in R$ nilpotent.

(a) Zeigen Sie, dass $1 + x \in R^\times$

(b) Sei $u \in R^x$. Zeigen Sie, dass $u + x \in R^\times$.

Zeigen Sie außerdem die folgende Gleichheit für einen kommutativen Ring R:

$$R^\times = R \setminus \bigcup_{\substack{m \subset R \\ \text{max. Ideal}}} m$$

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die kanonische Projektion $\pi : R \twoheadrightarrow R/I$ eine Bijektion

$$\{\mathfrak{a} \subseteq R \text{ Ideal} \mid I \subseteq \mathfrak{a}\} \longleftrightarrow \{\text{Ideale in } R/I\}$$

induziert.

Abgabe in der Übung am Mittwoch, 25.10.2017.