PD Dr. S. Orlik **SS 09**

Einführung in die komplexe Analysis

8. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $k, C > 0$ positive Konstanten mit $|f(z)| \leq C(1+|z|)^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, dass f ein Polynom ist.

Aufgabe 2: a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ und $M > 0$. Angenommen für jede Folge $(z_n)_n \subset G$, die in G keinen Häufungspunkt hat gilt $\limsup_{n\to\infty} |f(z_n)| \leq M$. Man zeige, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in G$.

b) Sei $R > 0$ und $g \in \mathcal{O}(\triangle(0,R))$ nicht konstant. Man zeige, dass die Funktion

$$m_g(\rho) := \max_{|z|=\rho} |g(z)|$$

auf dem Intervall $[0, R)$ streng monoton und stetig ist.

Aufgabe 3: Seien $r_1, r_2 > 0$ Radien mit $2r_1 < r_2$ und $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $r_1 < |a| < r_2 - r_1$. Seien γ_i die Wege definiert durch $\gamma_1(t) = a + r_1 e^{-2\pi i t}$ und $\gamma_2(t) = r_2 e^{2\pi i t}$ mit $0 \leq t \leq 1$. Es sei c der Zyklus $c = \{(1,\gamma_1), (2,\gamma_2)\}$. Man entscheide, für welche der folgenden Gebiete c nullhomolog ist:

a) $G_1 = \triangle(0, 2r_2)$.

b) $G_2 = \triangle(0, 2r_2) \setminus \{0\}$.

c) $G_3 = \triangle(0, 2r_2) \setminus \{a\}$.

Aufgabe 4: Es sei φ' eine weitere Funktion wie in Satz 9.15 a) der Vorlesung. Man zeige, dass eine k_0-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ existiert mit $\varphi' = \xi \cdot \varphi$.