Einführung in die komplexe Analysis

7. Übungsblatt

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\partial_+\triangle(i,2)} \frac{e^{iz}}{z^2+2iz+3}dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial_+(\triangle(0,2)\cap\mathbb{H}^+)} \frac{\cos z}{z^2+1}dz.$$

Aufgabe 2: Sind $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen, so heißt eine stetige Abbildung $f : U \to V$ *eigentlich*, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset V$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt ist.

a) Zeigen Sie: Ist $f : U \to V$ holomorph und eigentlich und ist V zusammenhängend, so ist f surjektiv.

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a) erneut den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie, ob folgende holomorphe Funktionen existieren können:

a) $f \in \mathcal{O}(\triangle(0,1))$ mit $f^{(n)}(0) = (-1)^n(n-1)!$ für alle $n \geq 0$.

b) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $f^{(n)}(0) = (n-1)!$ für alle $n \geq 0$.

c) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $f(1/n) = \frac{1}{n}e^{-n}$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 4: Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, dass eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ existiert mit $f = cg$.