

Einführung in die komplexe Analysis

6. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f \in C^0(G)$. Existiert für alle $z \in G$ eine offene Umgebung $U \subset G$ von z , sodass $f|_U$ eine Stammfunktion auf U hat, so hat f auf ganz G eine Stammfunktion.

Aufgabe 2: Es sei $s = s_{01}$ die Strecke, welche die Punkte $0, 1 \in \mathbb{C}$ miteinander verbindet und $G := \overline{\mathbb{C}} \setminus s$. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion mit $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Zeigen Sie, dass f auf G eine Stammfunktion hat.

Aufgabe 3: Es sei $a \in \mathbb{C}^\times$ mit $|\operatorname{Im}(a)| \leq \operatorname{Re}(a)$. Man berechne das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 x^2) dx$.

(Hinweis: Integrieren Sie die Funktion $\exp(-z^2)$ längs eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei eine Kathete auf der reellen x -Achse liege und die Hypotenuse die Gerade durch a und dem Ursprung sei.)

Aufgabe 4: Man berechne das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

(Hinweis: Integrieren Sie die Funktion $\frac{\exp(iz)-1}{z}$ längs des Randes des Gebietes, das aus dem in der oberen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 mit Radius R durch Weglassen eines ebenfalls in der oberen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 mit Radius ϵ entsteht.)