Einführung in die komplexe Analysis

5. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei $f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) < 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|e^z - f_n(z)| < |z|^{n+1}$ gilt.

Aufgabe 2: a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in C^0(U)$. Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen auf U, die auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen f konvergiert. Ferner sei vorausgesetzt, dass die $(f_n)_n$ auf U eine Stammfunktion besitzen. Zeigen Sie, dass f auf U eine Stammfunktion hat.

b) Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete, sodass $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ein Gebiet ist. Sei $f : G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Einschränkung auf G_i, $i = 1, 2$, eine Stammfunktion hat. Man zeige, dass f auf $G_1 \cup G_2$ eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 3: Es sei γ_1 der im Uhrzeigersinn durchlaufende Halbkreisbogen durch die Punkte $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Man berechne die Integrale

a) $\int_\gamma \mathrm{Im}(z) dz$.

b) $\int_\gamma \frac{1}{|z|} dz$.

Aufgabe 4: Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ der durch $ae^{i\pi t} + be^{-i\pi t}$ definierte Weg. Berechnen Sie $\int_\gamma \mathrm{Re}(z) dz$.