PD Dr. S. Orlik **SS 09**

Einführung in die komplexe Analysis

10. Übungsblatt

Aufgabe 1: Welche der folgenden Familien sind normal auf $\mathbb{E}$?

$\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \mid |f^{(n)}(0)| \leq n! \; \forall n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \mid f(0) = 0\}$

$\mathcal{F}_3 = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \mid 1 < |\mathrm{Im} f(z)| < 2 \; \forall z \in \mathbb{E}\}$.

Aufgabe 2: Betrachte folgende Familien:

$\mathcal{F} = \{f_n(z) = \sin(nz) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{G} = \{g_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}) \mid 1/g_n \in \mathcal{F}\}$.

a) Man zeige, dass $\mathcal{G}$ normal auf $\mathbb{H}^+$ ist.

b) Gibt es ein Gebiet auf dem $\mathcal{F}$ normal ist ?

Aufgabe 3: Wo haben die folgenden Funktionen Singularitäten, und um welche Art von Singularität handelt es sich dabei ?

$f_1(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 3}{(z^3 + 2z + 3)^2}$ $\qquad f_2(z) = z^2 \sin(\frac{1}{z})$

$f_3(z) = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}, \; n \in \mathbb{N}$ $\qquad f_4(z) = \dfrac{z^3 + 2z^2 + 5z}{(e^z - 1)^3}$.

Aufgabe 4: Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z > 0 \text{ falls } z \in \mathbb{R}\}$.

a) Man zeige, dass genau eine holomorphe Funktion $\log : G \to \mathbb{C}$ existiert mit $e^{\log(z)} = z \; \forall z \in G$ und $\log(1) = 0$.

b) Ist $f(z) = z \log(z)$ in 0 holomorph fortsetzbar ?