Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender

SS 13

Algebraische Geometrie

7. Übungsblatt

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Ringgarbe auf X.

Aufgabe 1: (3 Punkte) Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{A}$-Modul. Zeigen Sie, daß $\mathcal{F}$ genau dann kohärent ist, wenn eine offene Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ von X existiert, so daß $\mathcal{F}_{|U_i}$ ein kohärenter $\mathcal{A}_{|U_i}$-Modul ist, für alle $i \in I$.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{A}$-Modul von endlichem Typ und $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von $x \in X$. Ferner seien $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{F}(U)$ derart, daß $\{s_{1,x}, \ldots, s_{p,x}\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathcal{A}_x$-Moduls $\mathcal{F}_x$ ist. Zeigen Sie, daß dann eine offene Umgebung $V \subseteq X$ von x existiert, so daß für alle $y \in V$ der $\mathcal{A}_y$-Modul $\mathcal{F}_y$ erzeugt ist von $\{s_{1,y}, \ldots, s_{p,y}\}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Es sei

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{A}$-Moduln. Zeigen Sie, daß $\mathcal{F}$ kohärent ist, falls $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ kohärent sind.

Aufgabe 4: (5 Punkte) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ kohärente $\mathcal{A}$-Moduln. Zeigen Sie, daß $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ein kohärenter $\mathcal{A}$-Modul ist.

Aufgabe 5: (3 Punkte) Man gebe ein Beispiel einer nicht-kohärenten Ringgarbe an.