Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender **SS 13**

Algebraische Geometrie

5. Übungsblatt

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: (5 Punkte) Zeigen Sie, daß projektive Morphismen von k-Varietäten eigentlich sind.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Sei $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus und $\iota : Z \to X$ eine abgeschlossene Einbettung. Zeigen Sie, daß $f \circ \iota : Z \to Y$ ein eigentlicher Morphismus ist. Folgern Sie, daß abgeschlossene Untervarietäten einer vollständigen Varietät wieder vollständig sind.

Aufgabe 3: ($2 + 2 = 4$ Punkte)

(a) Sei $b \in \mathbb{Q}$ ganz über $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß $b \in \mathbb{Z}$.

(b) Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung und B ein Integritätsbereich. Dann ist B genau dann ein Körper, wenn A ein Körper ist.

Aufgabe 4: ($2 + 2 = 4$ Punkte) Es sei $A \hookrightarrow B$ eine ganze Ringerweiterung, $I \subseteq B$ ein Ideal und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Zeigen Sie:

(a) $A/(I \cap A) \hookrightarrow B/I$ ist eine ganze Ringerweiterung.

(b) $A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow (A - \mathfrak{p})^{-1}B$ ist eine ganze Ringerweiterung.